

Recenzja

pracy doktorskiej mgr Anny Pawińskiej

**pt.: „ANALIZA MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA FUNKCJI TREFFTZA DO ROZWIĄZYWANIA
NIELINIOWYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH MECHANIKI”**

Podstawę do opracowania recenzji pracy doktorskiej mgr Anny Pawińskiej stanowi pismo Dziekana Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej z dnia 16.06.2016r.

Praca zawiera 187 stron i podzielona jest na 9 rozdziałów poprzedzonych spisem treści, wykazem ważniejszych symboli i indeksów, a zakończoną bibliografią liczącą 98 pozycji literaturowych związanych z tematem pracy, spisem tabel i rysunków oraz streszczeniem pracy w języku polskim i angielskim.

1. Omówienie pracy

Praca mgr Anny Pawińskiej dotyczy zastosowania funkcji Trefftza do rozwiązywania zagadnień odwrotnych mechaniki. Ze spisu literatury wynika, że Doktorantka jest autorem jednej i współautorem 3 prac cytowanych w rozprawie.

W rozdziale 1 Doktorantka podaje uzasadnienie wyboru tematyki badań oraz formułuje następującą tezę badawczą: „Metoda funkcji Trefftza jest skutecznym narzędziem rozwiązywania prostych oraz granicznych zagadnień odwrotnych dla procesów opisywanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi oraz zagadnień odwrotnych identyfikacji źródeł”. Jako główny cel swojej pracy przyjmuje opracowanie skutecznej metody rozwiązywania wybranych prostych i odwrotnych zagadnień mechaniki.

W rozdziale 2 przedstawiony został aktualny stan wiedzy związany z zastosowaniem funkcji Trefftza do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Z przeglądu literatury wynika, że funkcje Trefftza są powszechnie stosowane do rozwiązywania zagadnień prostych (bezpośrednich) i odwrotnych dla równania przewodnictwa ciepła, równań termosprężystości, równania falowego oraz równań opisujących drgania płyt i belek. Szczególną uwagę poświęcono przeglądzie metod, które Doktorantka rozwinęła w swojej pracy. Można do nich zaliczyć metodę iteracji Picarda, stosowaną do rozwiązywania zagadnień nieliniowych oraz połączenie metody elementów skończonych z funkcjami Trefftza jako funkcjami bazowymi.

Rozdział 3 zawiera opis metody, która została zastosowana do rozwiązywania zagadnień prostych i odwrotnych mechaniki. Metoda ta w ogólnym przypadku dotyczy rozwiązywania niejednorodnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Rozwiązanie liniowego równania różniczkowego poszukiwane jest w postaci kombinacji liniowej funkcji Trefftza, tożsamościowo spełniających to równanie i tworzących układ zupełny tych funkcji. Autorka

tę ideę stosuje również w Metodzie Elementów Skończonych. W rozdziale tym wymienione są trzy warianty tej metody. Do rozwiązywania zagadnień nieliniowych Doktorantka stosuje Metodę Iteracji Picarda. W metodzie tej operator różniczkowy rozkładany jest na składową liniową i nieliniową. Rozwiązanie początkowe przyjmowane jest w postaci kombinacji liniowej funkcji Trefftza, a następnie w procesie iteracji i stosowaniu operacji odwrotnych otrzymywane jest rozwiązanie równania nieliniowego. Wyniki obliczeń wykonane za pomocą opisanej metody zostały przedstawione w następnych rozdziałach.

W rozdziale 4, funkcje Trefftza zostały zastosowane dla jednowymiarowego liniowego zagadnienia przewodnictwa ciepła we współrzędnych bezwymiarowych. Udowodnione zostało twierdzenie o liczbie oraz liniowej niezależności funkcji cieplnych (funkcji Trefftza dla niestacjonarnego równania przewodnictwa ciepła). W celu przetestowania proponowanej metody zostało sformułowane i rozwiązane analitycznie zagadnienie testowe. Rozwiązanie to pozwala na ocenę poprawności rozwiązania numerycznego za pomocą zdefiniowanych w tym rozdziale norm względnych. Zbadany został wpływ rozmieszczenia węzłów pomiarowych (równoodległe oraz węzły Czebyszewa) na dokładność rozwiązania zagadnienia prostego i odwrotnego. Zbadana została również stabilność rozwiązania zagadnienia odwrotnego. W tym celu wartości temperatury w węzłach pomiarowych zostały zaburzone błędem losowym. Obliczenia zostały również wykonane Metodą Elementów Skończonych z aproksymacją rozwiązania za pomocą kombinacji liniowej funkcji Trefftza w każdym elemencie. Obszar został podzielony na dwa elementy skończone. Połączenie rozwiązań w elementach osiągnięte zostało za pomocą funkcjonu minimalizującego średniokwadratowy błąd temperatury i jej pochodnej na granicy elementów skończonych. Wyniki obliczeń porównane z analitycznym rozwiązaniem potwierdziły dużą zgodność rozwiązań numerycznych zagadnień prostych i odwrotnych z rozwiązaniem analitycznym.

Przedstawione w rozdziale 5 rozważania dotyczą zastosowania funkcji Trefftza do rozwiązywania nieliniowych, dwuwymiarowych zagadnień stacjonarnych przewodnictwa ciepła. Układ rozdziału podobny jest do poprzedniego. Udowodnione zostało twierdzenie o liczbie oraz liniowej niezależności funkcji Trefftza dla równania Laplace'a (wielomianów harmonicznych) w przestrzeni dwuwymiarowej. Analitycznie zostało rozwiązane nieliniowe równanie przewodnictwa, które posłużyło do potwierdzenia poprawności rozwiązań numerycznych. Do obliczeń użyto bezwęzłowej metody elementów skończonych z funkcjami Trefftza oraz metodę iteracji Picarda z funkcjami Trefftza. Zbadano wpływ odległości punktów pomiarowych od brzegu, na którym nieznanym jest warunek brzegowy ($\epsilon = 0,1$ i $\epsilon = 0,3$), na rozwiązanie numeryczne zagadnienia odwrotnego. Zadane w węzłach pomiarowych wartości temperatury wyznaczone z rozwiązania analitycznego zaburzone błędem losowym i zbadano wpływ tego błędu na stabilność rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą obu metod potwierdziły dużą zgodność z rozwiązaniem analitycznym.

Rozdział 6 zawiera wyniki obliczeń dla zagadnienia odwrotnego wyznaczania rozkładu temperatury w pierścieniach ślizgowych uszczelnień bezstykowych. Przedstawiony został schemat bezstykowego uszczelnienia czołowego oraz model matematyczny wymiany ciepła w takim uszczelnieniu. Rozkład temperatury w części ruchomej i nieruchomej uszczelnienia przybliżony został za pomocą kombinacji liniowej funkcji Trefftza. W części nieruchomej połączenia rozwiązane zostało zagadnienie odwrotne. Nieznane wartości temperatury na powierzchni uszczelnienia zostały wyznaczone na podstawie znanych wartości temperatury

(z rozwiązania analitycznego) w pewnej odległości od brzegu uszczelnienia ($z = -0,002$). Obliczenia zostały przeprowadzone dla różnych wartości liczby funkcji Trefftza oraz dla zadanej wartości błędu losowego $\delta = 0,02$ wartości temperatury wewnątrz statora. Wyniki obliczeń wskazują na wzrost dokładności rozwiązania zagadnienia odwrotnego dla dokładnych wartości temperatury wraz ze wzrostem liczby funkcji Trefftza. W przypadku danych obciążonych błędem pomiarowym wzrost dokładności rozwiązania występuje, gdy liczba funkcji Trefftza nie przekracza 40.

W rozdziale 7 przedstawione zostało rozwiązanie zagadnienia prostego i odwrotnego drgań belki, wyznaczone za pomocą funkcji Trefftza. Równanie opisujące drgania belki jest równaniem różniczkowym czwartego rzędu. Podobnie jak we wcześniejszych rozdziałach zostało udowodnione dla rozwiązania tego równania twierdzenie o liczbie i liniowej niezależności funkcji Trefftza. Podane zostało analitycznie rozwiązane zagadnienie testowe, z którym porównano zagadnienie proste rozwiązane numerycznie metodą funkcji Trefftza. Przedstawione zostały również wyniki obliczeń dla stałej i sinusoidalnej funkcji wymuszenia drgań belki. Zagadnienie odwrotne dla równania opisującego drgania belki zostało sformułowane w dwóch wariantach: jako zagadnienie identyfikacji warunków brzegowych oraz zagadnienie identyfikacji funkcji wymuszającej drgania belki. Zbadana została wrażliwość rozwiązania zagadnienia odwrotnego na błędy losowe funkcji przemieszczenia w wybranych punktach belki. Jako ostatnie zostało rozwiązane zagadnienie proste drgań swobodnych belek geometrycznie nieliniowych metodą iteracji Picarda z zastosowaniem funkcji Trefftza. Wszystkie rozwiązane w rozdziale zagadnienia pokazały skuteczność metod, w których do aproksymacji rozwiązania wykorzystane zostały funkcje Trefftza.

Rozdział 8 jest uogólnieniem rozważań z poprzedniego rozdziału na zagadnienia związane z drganiami płyt. Układ rozdziału jest podobny jak rozdziału 7.

Kończący pracę, rozdział dziewiąty stanowi podsumowanie wyników pracy oraz wnioski końcowe. Na szczególną uwagę zasługują oryginalne osiągnięcia Autorki, do których można zaliczyć :

- opracowanie metody rozwiązywania nieliniowych zagadnień prostych przewodnictwa ciepła oraz drgań belki (połączenie funkcji Trefftza i metody iteracji Picarda),
- opracowanie metody rozwiązywania nieliniowych, brzegowych zagadnień odwrotnych,
- opracowanie metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych związanych z identyfikacją funkcji źródła (zagadnienia identyfikacji obciążenia belki oraz płyty),
- sformułowanie i udowodnienie twierdzeń o liczbie i liniowej niezależności funkcji Trefftza dla rozważanych równań różniczkowych cząstkowych.

2. Uwagi

Oznaczenia

W spisie oznaczeń wielkości E , δ , ε oznaczają względny błąd aproksymacji w normie L_2 . Dlaczego użyto tyle symboli do oznaczenia jednej wielkości w całej pracy, tym bardziej, że niektóre z nich mają inne znaczenie?

Str. 8

Stwierdzenie, że „funkcje Trefftza są liniowo niezależne i tworzą układ zupełny” nie do końca jest prawdziwe. Jeśli weźmiemy pod uwagę dwie dowolne funkcje Trefftza, to ich

