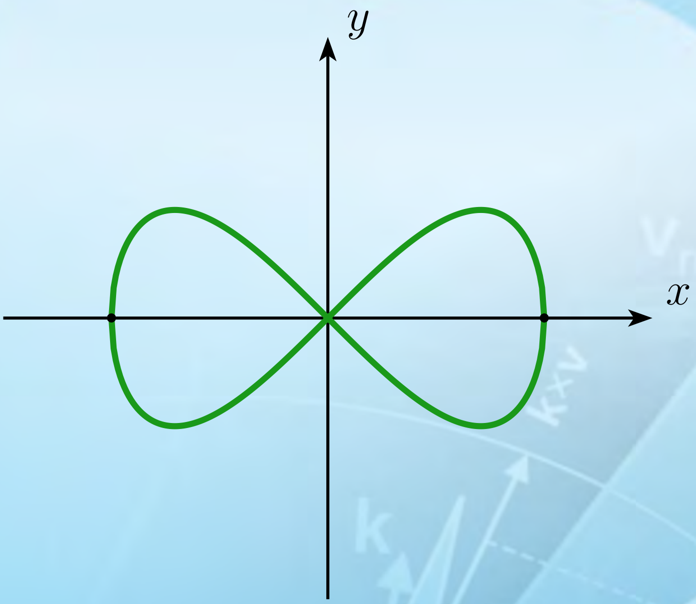
Politechnika
Świętokrzyska

Polibus
PŚk dla Maturzystów!

Materiały pomocnicze z matematyki dla studentów I roku Politechniki Świętokrzyskiej

Andrzej Lenarcik

KURS.09



$$y^2 = x^2(1 - x^2)$$

Zapisy
tu.kielce.pl/**polibus**

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Politechnika Świętokrzyska
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Materiały opracowane w ramach projektu „Program Rozwojowy Potencjału Dydaktycznego Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach: kształcenie na miarę sukcesu" Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Poddziałanie 4.1.1,
Zadanie 6 - Fakultatywne zajęcia wyrównawcze z matematyki i fizyki dla studentów I roku 4 wydziałów PŚk
Umowa Nr: UDA-POKL.04.01.01-00-175/08-02

Kilka słów wstępu

Prezentowany tekst jest przeznaczony dla studentów pierwszego roku jako materiał uzupełniający podczas zajęć repetytoryjnych z matematyki z zakresu szkoły ponadgimnazjalnej. Wstępna wersja materiałów była prezentowana podczas kursu z matematyki dla młodzieży ze szkół ponadgimnazjalnych przeprowadzonego w Politechnice Świętokrzyskiej w okresie od 24 stycznia do 4 kwietnia 2009 z inicjatywy JM Rektora prof. Stanisława Adamczaka oraz Pani Rektor prof. Małgorzaty Suchańskiej. Dzięki wsparciu projektu europejskiego, kierowanego przez Panią prof. Lidię Dąbek, materiał przybrał obecną postać.

Materiały mają strukturę dziesięciu wykładów. Z konieczności wybrano najważniejsze zagadnienia. Głównym celem autora było ukazanie słuchaczom dwóch źródeł wiedzy matematycznej: przestrzennego i czasowego. Starożytni Grecy poprzez obserwację przestrzeni odkrywali związki geometryczne. Z kolei algebrę, której odkrycie zawdzięczamy Arabom, można powiązać z odczuwaniem czasu (czas→mowa→napis→wyrażenie algebraiczne). Oba te nurty spotkały się i rozwinęły w średniowiecznej Europie.

Autor gorąco dziękuje prof. Arkadiuszowi Płoskiemu za ukazanie roli algebry i znaczenia historii w prezentacji zagadnień matematycznych, Pani Danucie Pyrek – doradcy metodycznemu z Samorządowego Ośrodka Doradztwa Metodycznego i Doskonalenia Nauczycieli w Kielcach – za korektę tekstu oraz dr Sylwii Hożejowskiej za wskazanie możliwości opracowania tekstu w ramach projektu europejskiego.

O zadaniach

Zadania prezentowane podczas wykładów pochodzą w przeważającej części ze zbioru E. Świda, E. Kuczarb, M. Kuczarb, *Matematyka – próbne arkusze maturalne – Matura 2008, 2009*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro. Np. zadanie P-3/8, to zadanie z poziomu podstawowego z arkusza 3 o numerze 8. Literka „R" na początku oznacza poziom rozszerzony. Zadanie logiczne „torebka" (str. 7) pochodzi z książki L. Pijanowskiego, *Rozkosze łamania głowy*, zaś jego rozwiązanie autorstwa Oli Malisiewicz jest zaczerpnięte z Zeszytu 1 Seminarium Jakości Kształcenia Matematycznego, Kielce 2007 (str. 32–33). Symbolem ⊗ oznaczone są ćwiczenia pozostawione czytelnikowi.

Spis treści

Wykład 1

Trochę o kombinatoryce – reguła mnożenia

W tym krótkim tekście chcemy przedstawić kilka prostych faktów z kombinatoryki, które są wprowadzeniem do rachunku prawdopodobieństwa. Podstawowym narzędziem jest tutaj tak zwana

Reguła mnożenia

Daje ona szczególnie przejrzyste wprowadzenie do kombinatoryki. ([1])

Załóżmy, że wykonujemy sekwencyjny eksperyment. Ponumerujmy etapy $1, 2, \ldots, k$. Przyjmijmy, że na każdym etapie mamy pewną ustaloną liczbę wyborów $n_1, n_2, \ldots, n_k$. W wyniku eksperymentu otrzymujemy pewien k-elementowy ciąg. Pytanie brzmi: na ile sposobów możemy przejść przez eksperyment, lub równoważnie: ile różnych ciągów wyborów możemy uzyskać w wyniku realizacji eksperymentu? Reguła mnożenia odpowiada:

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k \; .$$

Przyjrzyjmy się jej działaniu.

Zadanie 1. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?

Zadanie wydaje się pracochłonne. Liczby trzycyfrowe to $100, 101, \ldots, 999$. Odejmując od każdej z nich 99 przekonujemy się, że jest ich 900. Ale jak uwzględnić wszystkie powtórzenia cyfr?

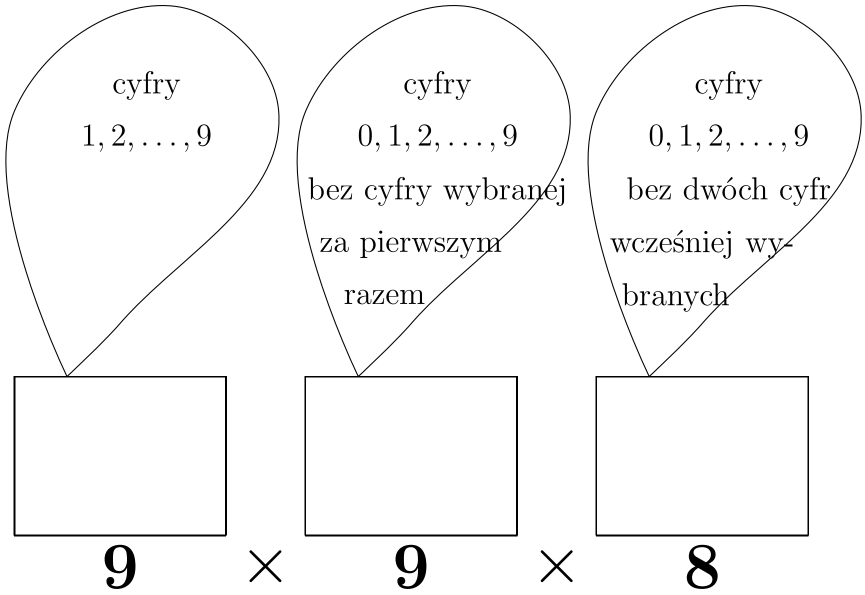
Z pomocą przychodzi nam reguła mnożenia. Wyobraźmy sobie proces budowania takiej liczby, jako proces wybierania cyfr począwszy od pierwszej. W pierwszym kroku mamy do wyboru dziewięć cyfr: $1, 2, \ldots, 9$, gdyż zero nie może być na początku. W drugim kroku dopuszczamy już wszystkie cyfry: $0, 1, \ldots, 9$, ale nie możemy powtórzyć cyfry wybranej w pierwszym kroku. Z kolei w trzecim kroku bierzemy pod uwagę

([1]) M. Zakrzewski, T. Żak, *Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek*, Quadrivium, Wrocław 1998.

cyfry $0, 1, \ldots, 9$, ale musimy pominąć dwie cyfry, które wybraliśmy w dwóch pierwszych krokach. Ostatecznie mamy

$$9 \times 9 \times 8 = 648 \text{ wyborów}$$

i tyle jest właśnie liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach. Poniżej na rysunku rozumowanie zilustrowane jest za pomocą „worków z możliwościami wyboru”.



Możemy też w analogiczny sposób obliczyć, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych. Pierwszą cyfrę wybieramy na 9 sposobów (bo opuszczamy zero), a potem drugą i trzecią cyfrę wybieramy na 10 sposobów. Otrzymujemy, jak wcześniej, $9 \times 10 \times 10 = 900$.

Zadanie 2. Na ile sposobów może przebiegać eksperyment:

(a) pięciu rzutów monetą? Mamy

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32 \text{ sposoby;}$$

(b) dwóch rzutów kostką? Mamy

$$6 \times 6 = 6^2 = 36 \text{ sposobów.}$$

Zadanie 3. Na ile sposobów można ustawić pięć osób w kolejce?

Pierwszą osobę wybieramy spośród pięciu, drugą spośród czterech itd. Na końcu zostanie jedna osoba. Liczba sposobów wynosi

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120\ .$$

Uwaga 4. Tradycyjnie używa się symbolu $n!$ („n silnia”) dla oznaczenia iloczynu kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Mamy

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n\ .$$

Czyli $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$ itd. Przyjmujemy z definicji, że $0! = 1$.

Zadanie 5. W urnie jest 5 kul. Losujemy kolejno trzy. Na ile sposobów może przebiegać eksperyment?

(a) Ze zwracaniem mamy

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \text{ sposobów.}$$

(b) Bez zwracania mamy

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ sposobów.}$$

Komentarz 6. We wszystkich dotychczasowych przykładach istotna była kolejność dokonywanych wyborów. Ponumerujmy kule w ostatnim zadaniu 5(b): $1, 2, 3, 4, 5$. Sekwencja wylosowanych kul $(1, 2, 3)$ różni się istotnie na przykład od sekwencji $(1, 3, 2)$ i każda z nich osobno wchodzi do otrzymanej liczby 60. Dla podkreślenia, że kolejność jest istotna, używamy nawiasu okrągłego.

Możemy w takim razie zadać pytanie: *na ile różnych sposobów można wylosować trzy kule spośród pięciu, gdy nie ma dla nas znaczenia kolejność ich losowania*? Pytamy w tym przypadku o liczbę wszystkich trzyelementowych zestawów (podzbiorów). Żeby odpowiedzieć na to pytanie, zastanówmy się na ile różnych sposobów może być wyciągnięty z urny ten sam zestaw kul, powiedzmy $1, 2, 3$? Mamy tutaj sześć różnych ciągów prowadzących do tego zestawu:

$$(1, 2, 3); \quad (1, 3, 2); \quad (2, 1, 3); \quad (2, 3, 1); \quad (3, 1, 2); \quad (3, 2, 1)\ .$$

Skąd się wzięła liczba 6? Oczywiście jest to ustawianie w kolejce, czyli $3!$ (Zadanie 3 oraz Uwaga 4). Ponieważ ta obserwacja uogólnia się na każdy zestaw, więc liczba wszystkich zestawów będzie sześć razy mniejsza od liczby sposobów przebiegu doświadczenia, w którym losujemy kule kolejno. Mamy zatem $60/6 = 10$ różnych trzyelementowych zestawów (podzbiorów) w zbiorze pięcioelementowym.

Spójrzmy na wszystkie 60 sposobów przebiegu eksperymentu. W każdym z dziesięciu wierszy mamy po sześć ciągów realizujących ten sam zestaw.

$$\begin{array}{llllll}
(1,2,3); & (1,3,2); & (2,1,3); & (2,3,1); & (3,1,2); & (3,2,1); \\
(1,2,4); & (1,4,2); & (2,1,4); & (2,4,1); & (4,1,2); & (4,2,1); \\
(1,2,5); & (1,5,2); & (2,1,5); & (2,5,1); & (5,1,2); & (5,2,1); \\
(1,3,4); & (1,4,3); & (3,1,4); & (3,4,1); & (4,1,3); & (4,3,1); \\
(1,3,5); & (1,5,3); & (3,1,5); & (3,5,1); & (5,1,3); & (5,3,1); \\
(1,4,5); & (1,5,4); & (4,1,5); & (4,5,1); & (5,1,4); & (5,4,1); \\
(2,3,4); & (2,4,3); & (3,2,4); & (3,4,2); & (4,2,3); & (4,3,2); \\
(2,3,5); & (2,5,3); & (3,2,5); & (3,5,2); & (5,2,3); & (5,3,2); \\
(2,4,5); & (2,5,4); & (4,2,5); & (4,5,2); & (5,2,4); & (5,4,2); \\
(3,4,5); & (3,5,4); & (4,3,5); & (4,5,3); & (5,3,4); & (5,4,3).
\end{array}$$

Zwróćmy uwagę, że gdy chcemy wypisać 10 interesujących nas zestawów, wystarczy z każdego wiersza wybrać po jednym, na przykład ten, w którym numery kul są ustawione rosnąco (pierwsza kolumna).

Podsumujmy. Otrzymaną liczbę 10 możemy zapisać jako

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\,.$$

Uogólnijmy teraz poprzednie rozumowanie na przypadek, gdy w urnie jest n kul i losujemy bez zwracania k kul. W tym przypadku liczba k-elementowych zestawów (podzbiorów) wyniesie

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot\ \ 2\ \ \cdot\ \ 3\ \ \cdot\ldots\cdot\ \ \ k}\,.$$

Liczbę tę oznaczamy $\binom{n}{k}$ i nazywamy *symbolem Newtona.* Mnożąc licznik i mianownik przez $(n-k)!$ otrzymamy

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Zauważmy, że

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\,n!}=1\,.$$

Jest to wzór na liczbę zero-elementowych podzbiorów. Podzbiór taki jest tylko jeden — zbiór pusty (oznaczamy go $\varnothing$).

Własność 7.

(a) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

(b) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Uwaga 8. Poniższy układ liczb

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
* & * & & * & & * & & * & & * & *
\end{array}$$

nazywany jest *trójkątem Pascala.* (2) Po rozpisaniu mamy

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & * & & * & & * & & * & & * & & * & & *
\end{array}$$

Własność 7(a) oznacza symetrię trójkąta Pascala, zaś 7(b) oznacza, że każda liczba różna od jeden, stojąca w trójkącie Pascala, jest sumą dwóch sąsiednich liczb stojących nad nią.

Zadanie 9. Udowodnij, że suma wyrazów stojących w n-tym wierszu trójkąta Pascala wynosi 2^n.

Rozwiązanie. Oczywiście suma $n-$tego wiersza w trójkącie Pascala jest równa liczbie wszystkich podzbiorów zbioru $n-$elementowego. Wystarczy zatem pokazać, że liczba tych podzbiorów wynosi 2^n. Wyjaśnimy to na przykładzie. Wypiszmy wszystkie podzbiory zbioru trzyelementowego $\{a,b,c\}$. (3) Mamy tutaj trzy podzbiory jednoelementowe $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, trzy podzbiory dwuelementowe $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, jeden pozbiór trzyelementowy, równy całemu zbiorowi, oraz podzbiór zeroelementowy — zbiór pusty. Dla każdego podzbioru budujemy ciąg zer i jedynek w ten sposób, że przyporządkowujemy elementowi jedynkę, gdy element występuje on w podzbiorze i zero w przeciwnym przypadku. Taki ciąg nazywamy funkcją charakterystyczną podzbioru.

podzbiór	funkcja char.		
	a	b	c
$\{a\}$	1	0	0
$\{b\}$	0	1	0
$\{c\}$	0	0	1
$\{a,b\}$	1	1	0
$\{b,c\}$	0	1	1
$\{a,c\}$	1	0	1
$\{a,b,c\}$	1	1	1
$\varnothing$	0	0	0

Podzbiorów jest tyle, co funkcji charakterystycznych, tych zaś jest tyle, co ciągów zero-jedynkowych o długości n, czyli zgodnie z regułą mnożenia

$$\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n\text{ razy}} = 2^n\ .$$

(2) Blaise Pascal (1623-1662) - francuski filozof, fizyk, matematyk i pisarz.

(3) Nawias sześcienny „{}” – w odróżnieniu od nawiasu okrągłego – oznacza, że kolejność elementów nie gra roli (zbiór).

Komentarz. Ciągi otrzymywane w wyniku ustawiania w kolejce (przestawienia) zbioru n-elementowego nazywamy *permutacjami.* Jest ich $n!$ (Zadanie 3). Ciągi k-elementowe wybierane ze zbioru n-elementowego bez zwracania nazywamy *wariacjami bez powtórzeń.* Jest ich $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-k+1) = n!/(n-k)!$ (Zadanie 5(b)). Z kolei, gdy losujemy ze zwracaniem, to ciągi nazywamy *wariacjami z powtórzeniami.* Jest ich $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k} = n^k$. (Zadanie 2 i 5(b)). I wreszcie k-elementowe zestawy (podzbiory) wybrane ze zbioru n-elementowego (Komentarz 6), nazywamy *kombinacjami.* Jest ich $\binom{n}{k}$.

Wykład **2**

Dwa ważne impulsy w rozwoju matematyki

Impulsy, o których mowa w tytule, to odkrycie niewymierności oraz wzajemne oddziaływanie geometrii i algebry. Zaczniemy od zadania logicznego.

2.1 Zadanie logiczne jako przykład ścisłego rozumowania

Warto podkreślić, że każde rozwiązanie zadania logicznego jest w istocie dowodem. Logika, podobnie jak geometria, w sposób naturalny otwiera młodzież na rozumowanie matematyczne.

Zadanie (Torebka). ([1])

I Na przystanku w kolejce do autobusu stało sześć pań. Jedna z nich miała piękną torebkę z prawdziwej krokodylej skóry i na niej srebrny monogram: jedną tylko literę. Była to pierwsza litera jej imienia i jednocześnie jej nazwiska.

II Jedna z pań w kolejce, pani Abacka, szyje sobie sukienki u tej samej krawcowej, co pani Barbara.

III Pani Ebacka stała w kolejce między panią Anną a panią Cebacką.

IV Pani Celina i pani Cabacka stały w kolejce najdalej od siebie.

V Pani Anna pracuje w tym samym biurze, co mąż pani Babackiej.

VI Pani Barbara stała w kolejce pierwsza.

VII Ani pani Czesława, ani pani Danuta nie nazywają się Abacka.

([1]) L. Pijanowski, Rozkosze Łamania Głowy, PW „Iskry”, Warszawa 1976.

VIII Pani Dabacka stała w kolejce między panią Ewą a panią Babacką.

IX Pani Cebacka stała w kolejce obok pani Barbary.

X Pani Danuta nie stała przedostatnia.

Proszę podać imiona, nazwiska i kolejność wszystkich pań, które stały w kolejce do autobusu oraz odpowiedzieć na pytanie: która z nich ma torebkę z prawdziwej krokodylej skóry?

Rozwiązanie (Aleksandra Malisiewicz). ([2]) Przede wszystkim zwróćmy uwagę, że są dwie panie o podobnie brzmiących nazwiskach: pani Cabacka i pani Cebacka. Pani Celina nie nazywa się Cabacka (IV), a skoro te panie stały najdalej od siebie to jedna z nich była pierwsza a druga ostatnia. Zgodnie z punktem VI pani Barbara stała w kolejce pierwsza, więc nazywa się Cabacka, a pani Celina stała ostatnia. Pani Cebacka, według punktu IX, stała obok pani Barbary, a obok pani Cebackiej (zgodnie z punktem III) stała pani Ebacka i za nią pani Anna. Otrzymujemy sytuację przedstawioną w tabeli:

imię	nazwisko
Barbara	Cabacka
	Cebacka
	Ebacka
Anna	
Celina	

Teraz skorzystamy z punktu VIII. Ponieważ pani Dabacka stała pomiędzy dwoma paniami, więc mogła stać tylko jako czwarta lub piąta. Gdyby stała na pozycji piątej, to zgodnie z punktem VIII jedna z jej sąsiadek miałaby na imię Ewa, co jest niemożliwe. Zatem pani Dabacka stoi na pozycji czwartej: przed nią – pani Ewa i za nią – pani Babacka. Ustawienie pań wyglądało tak:

imię	nazwisko
Barbara	Cabacka
	Cebacka
Ewa	Ebacka
Anna	Dabacka
	Babacka
Celina	

Zatem pani Dabacka ma na imię Anna, a pani Ebacka – Ewa. W punkcie X zawarto wskazówkę, że pani Danuta nie stała przedostatnia, więc nazywa się Cebacka. Skoro tak, to pani Babacka ma na imię Czesława, a pani Celina nazywa się Abacka.

([2]) Seminarium Jakości Kształcenia Matematycznego, Zeszyt 1, Kielce 2007, str. 32-33.

imię	nazwisko
Barbara	Cabacka
Danuta	Cebacka
Ewa	Ebacka
Anna	Dabacka
Czesława	Babacka
Celina	Abacka

Torebka z krokodylej skóry miała jako monogram tylko jedną literę, więc należała do Ewy Ebackiej.

Uwaga. Z informacji zawartej w punktach II, V i VII prawie nie korzystaliśmy. Potrzebne one są tylko do wprowadzenia pani Czesławy i pani Abackiej. Zatem można opuścić punkty II i V zostawiając tylko VII.

2.2 Dowód niewymierności $\sqrt{2}$

Sztukę rozumowania wykorzystamy w dowodzie niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Wiemy, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można jednoznacznie rozłożyć na czynniki pierwsze. Każdej takiej liczbie można jednoznacznie przyporządkować ilość dwójek w tym rozkładzie:

liczba	rozkład	liczba dwójek
10	$2 \cdot 5$	1
100	$2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$	2
91	$7 \cdot 13$	0
8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	3
n	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k} \ldots$	k
n^2	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k} \ldots$	$2k$

Wniosek. Kwadrat liczby całkowitej dodatniej ma zawsze parzystą ilość dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze.

Fakt. $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Dowód. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Wówczas istniałyby liczby całkowite dodatnie p, q takie, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i przenosząc q^2 na lewą stronę otrzymujemy

$$2q^2 = p^2.$$

Po lewej stronie mamy parzystą liczbę dwójek w q^2 oraz jeszcze jedną dwójkę, czyli liczba dwójek w rozkładzie na czynniki lewej strony jest nieparzysta. Po prawej stronie liczba dwójek jest parzysta. Zatem lewa strona nie może być równa prawej. Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $\sqrt{2}$ nie może być liczbą wymierną.

2.3 Uwaga historyczna

Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ wywołał ponad dwa tysiące lat temu poważny kryzys w pitagorejskiej szkole filozoficznej. Starożytni Grecy mieli niezwykły okres swojej historii, który rozpoczyna się około VII w. przed Chrystusem i trwa do około I wieku. W okresie tym w Grecji bardzo intensywnie rozwijała się filozofia, co było pewnym ewenementem kulturowym. Filozofowie greccy poszukiwali tzw. *prazasady bytu*, czyli mówiąc prosto, zastanawiali się skąd się wszystko wzięło? Albo: co jest źródłem bytu? Różni filozofowie formułowali różne odpowiedzi na to pytanie.

Anaksymander	(bezkres, nieskończoność)
Anaksymenes	(powietrze)
Tales	(woda)
Heraklit	(ogień)
Anaksagoras	(„duch”)
Demokryt	(atomy)
Pitagorejczycy	(liczba)

Podajemy tutaj tylko kilka uproszczonych faktów. Zainteresowanych odsyłamy do *Historii Filozofii* W. Tatarkiewicza. ***Anaksymander*** uważał, że prazasadą bytu jest bezkres (nieskończoność). Z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy miał wiele racji; bez nieskończoności trudno jest rozwijać matematykę. ***Anaksymenes***, ***Tales*** i ***Heraklit*** wskazywali na podstawowe żywioły, odpowiednio: powietrze, wodę i ogień. Dwóch pierwszych zapewne obserwowało życiodajną rolę powietrza i wody; także występowanie w wielu postaciach. Z kolei ***Heraklit***, dostrzegając rolę ognia, w jakimś sensie odgadł to, co wiemy dzisiaj, że wszystkie pierwiastki cięższe od wodoru „wypaliły się” we wnętrzach gwiazd. Każdy atom naszego ciała był kiedyś we wnętrzu jakiegoś słońca. ***Anaksagoras***, dostrzegając „ducha” jako prazasadę bytu, budował fundamenty teologii. ***Demokryt*** odgadł istnienie atomów, jako drobin, z których zbudowana jest materia. Bardzo ciekawą koncepcję zaproponowali pitagorejczycy (przez skromność wszystkie swoje odkrycia przypisywali założycielowi szkoły filozoficznej – ***Pitagorasowi***). Uważali oni, że prazasadą bytu jest „liczba”.

Dla pitagorejczyków liczby były tym, czym dzisiaj dla nas są ułamki liczb całkowitych. Uczniowie szkoły pitagorejskiej nazywali stosunki niedużych liczb całkowitych *harmoniami.* Harmonii poszukiwali w otaczającej ich rzeczywistości. Potwierdzenie swoich idei odnaleźli w muzyce. Proporcja częstotliwości $2:1$, to oktawa, $3:2$ kwinta, $4:3$ kwarta, itp. Za harmonię okręgu (czyli proporcję obwodu i jego średnicy) uważali liczbę

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$$

Jak niewiele ta liczba różni się od znanej nam dzisiaj liczby

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

Odkrycie, że proporcja przekątnej kwadratu i jego boku nie jest harmonią (niewymierność $\sqrt{2}$!), oznaczało upadek całej koncepcji filozoficznej pitagorejczyków. Legenda głosi, że fakt ten długo utrzymywano w tajemnicy, a pierwszy, kto zdradził – zginął! Legenda ta oddaje dramaturgię tamtych odkryć. Pitagorejczycy podzielili się na dwa odłamy: *akuzmatyków* kontemplujących odkrytą sprzeczność oraz *matematyków*, którzy przebudowali pojęcie liczby (najwybitniejszym był Eudoksos). Liczba przestała być proporcją liczb całkowitych, a stała się proporcją dowolnych odcinków. Można powiedzieć, że od tamtych wydarzeń matematyka wyodrębniła się z filozofii. Później najwspanialsze odkrycia starożytnej matematyki greckiej zostały uporządkowane i wzbogacone przez Euklidesa w jego słynnym dziele *Elementy*, które było podręcznikiem geometrii do końca XIX wieku (jest to druga po Biblii księga cywilizacji ludzkiej pod względem poczytności).

Wracając jeszcze do koncepcji pitagorejskiej „liczby” jako prazasady bytu, zauważmy jak bardzo ta koncepcja została dzisiaj rozwinięta w stopniu, którego jej twórcy nawet nie podejrzewali. Współczesna fizyka i matematyka modelują większość znanych zjawisk z niezwykłą precyzją. Modelowanie zjawisk z wykorzystaniem komputerów jest fundamentem współczesnej inżynierii. Ciągle jednak, szczególnie w zakresie fizyki wszechświata rozpatrywanego jako całość, napotykamy na nieodgadnione tajemnice.

2.4 Wzajemne oddziaływanie geometrii i algebry

O ile Grekom zawdzięczamy rozwój geometrii, to odkrycie algebry zawdzięczamy Arabom. Słowa „algebra”, „algorytm” pochodzą z języka arabskiego. Należy podkreślić, że Grecy nie przekształcali wyrażeń. Zamieszczali rysunki, zaś rozumowania przeprowadzali za pomocą słów. Arabowie jako pierwsi zaczęli przekształcać wyrażenia zapisane za pomocą liter.

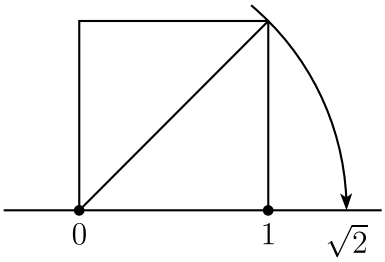
Zastanówmy się, które pojęcia matematyczne mają swoje źródło w geometrii, a które wywodzą się z algebry. Geometria jest związana z postrzeganiem przestrzeni, zaś algebra bardziej zależy od czasu:

czas → mowa → język → litery → wyrażenia

GEOMETRIA	ALGEBRA
figury	napisy
zbiory	wyrażenia
pojęcie miejsca	działania na wyrażeniach
dążenie do granicy	własności działań

Można powiedzieć, że matematyka rozwijała się dzięki wzajemnemu oddziaływaniu geometrii i algebry. Dziedzinę mającą swoje źródło w geometrii, nazywamy dzisiaj *analizą matematyczną*.

Przykład. Różnicę pomiędzy spojrzeniem geometrycznym (analitycznym) oraz algebraicznym można wytłumaczyć na przykładzie $\sqrt{2}$. Sam symbol (napis) $\sqrt{2}$ przynależy do algebry. Oznacza on liczbę, która podniesiona do kwadratu daje 2.



W konwencji analitycznej symbolowi temu przypisujemy „miejsce" na osi liczbowej, które oznaczamy za pomocą nieskończonego ułamka dziesiętnego

$$1{,}4142135\ldots$$

W ułamku tym jest ukryte pojęcie granicy.

Algebraiczne spojrzenie na $\sqrt{2}$ polega na tym, że nigdy nie zastępujemy go przybliżeniem dziesiętnym, ale korzystamy tylko z własności $(\sqrt{2})^2 = 2$. Podejście to stosujemy usuwając niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1.$$

Mamy tutaj niezwykłe twierdzenie, które przynależy do algebry, że każdą dowolnie skomplikowaną niewymierność można zawsze usunąć z mianownika. (3)

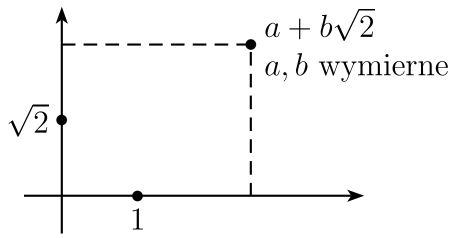
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} =$$
$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

Uwaga. Historycznie patrząc usuwanie niewymierności z mianownika miało pierwszorzędne znaczenie wtedy, gdy obliczenia wykonywano ręcznie. Dzisiaj usuwanie niewymierności z mianownika posiada raczej walor estetyczny i edukacyjny.

Wrócimy jeszcze do algebraicznego spojrzenia na $\sqrt{2}$. Warto zdawać sobie sprawę, że przypisanie „miejsca" temu symbolowi jest kwestią umowy między ludźmi. Przede wszystkim umówiliśmy się, że $\sqrt{2}$ jest liczbą dodatnią zaznaczając go na osi liczbowej na prawo od zera. Można sobie wyobrazić sytuację, w której symbolowi $\sqrt{2}$ przypisujemy inne „miejsce". Usuwając niewymierność z mianownika w drugim przykładzie, w istocie wykorzystywaliśmy działania na liczbach postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a i b są wymierne. Na liczbach takich możemy wykonywać cztery działania, ciągle otrzymując jako wynik liczby tej samej postaci. Czasami wykonalne jest pierwiastkowanie.

(3) Chodzi tutaj o niewymierność zapisaną z użyciem pierwiastków. Jakub Borkowski zwrócił mi uwagę, że twierdzenie to nie dotyczy np. liczby π.



Liczby te mają charakter „dwuwymiarowy”. Dla symbolu $\sqrt{2}$ obieramy nową oś. Podejście to zastosowano przy konstrukcji tzw. *liczb zespolonych.* [4]

2.5 Geometryzacja algebry: opis figur za pomocą równań

Dzięki kartezjańskiemu układowi współrzędnych możemy opisywać figury geometryczne za pomocą równań, albo odwrotnie: wychodząc od dowolnego równania zależnego od zmiennych „x” i „y”, możemy pytać jakie figury odpowiadają tym równaniom. Weźmy dla przykładu cztery równania:

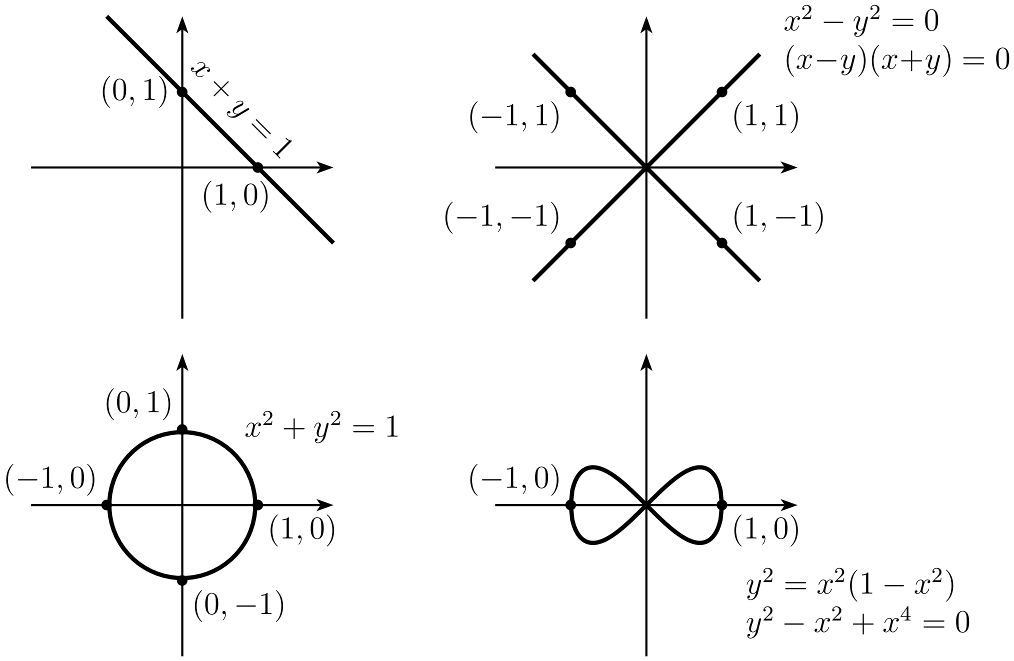
(a) $x + y = 1$

(b) $x^2 - y^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 = 1$

(d) $y^2 = x^2(1 - x^2)$

W każdym przypadku figura składa się ze wszystkich punktów (x, y), które spełniają dane równanie. Pierwsze trzy figury są dobrze znane, czwarta, zwana „krzywą Lissajous 1 : 2” przedstawia sobą symbol nieskończoności.



[4] Zaproponowano liczbę i, zwaną jednostką urojoną, której kwadrat wynosi -1. Liczbę tę traktowano algebraicznie jako napis spełniający warunek $i^2 = -1$. Ponieważ na osi liczbowej nie ma liczby o tej własności, zaproponowano jej „miejsce” poza osią liczbową, dokładnie nad zerem.

Za pomocą równania

$$Ax + By + C = 0$$

można opisać dowolną prostą na płaszczyźnie (A, B, C są liczbami, A, B nie są jednocześnie zerami).

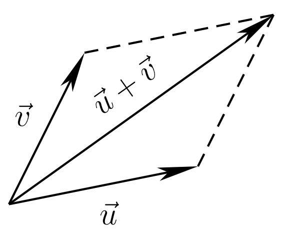
Rozważymy teraz układ złożony z dwóch równań. Interesuje nas rozwiązanie układu, czyli punkty wspólne obu figur opisywanych za pomocą tych równań.

Zadanie. Ile rozwiązań może mieć układ równań?

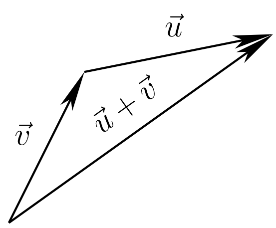
(a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y^2 = x^2(1 - x^2) \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$

2.6 Algebraizacja geometrii

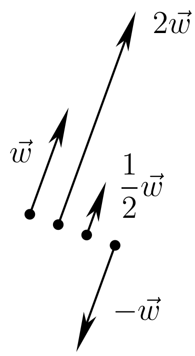
Chyba najpiękniejszym przykładem tego trendu są wektory. Wektory są obiektami geometrycznymi: są to odcinki z ustalonym „zwrotem”, oznaczonym strzałką. Dwa wektory uważamy za równe jeśli są do siebie równoległe, mają tą samą długość oraz jednakowe zwroty. Wektory możemy dodawać i mnożyć przez liczbę



dodawanie wektorów metodą równoległoboku



dodawanie wektorów metodą trójkąta



mnożenie wektora przez liczbę: wydłużanie, skracanie, zmiana zwrotu

Dzięki wektorom możemy precyzyjnie wprowadzić pojęcie układu współrzędnych (wykład 6).

Wykład **3**

O geometrii analitycznej: opis figur wzorami

Podczas tego wykładu chcemy rozwiązać kilka zadań wykorzystujących pojęcie odległości w układzie współrzędnych. Wcześniej omówimy odległość punktów na osi liczbowej. Zaczynamy od ćwiczenia na rozumienie symbolu funkcji.

3.1 Co oznaczają symbole $f(x)$ oraz $F(x, y)$?

Zadanie (Ćwiczenie na rozumienie symbolu funkcji)**.** Dane są funkcje $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x + 1$. Jak zinterpretować poniższe wyrażenia?

$$f(g(x)) = \qquad g(f(x)) = \qquad f(f(x)) = \qquad g(g(x)) =$$

Omówienie. Na zapis $f(x) = x^2$ patrzymy tutaj jak na zapis czynności. Umawiamy się, że symbol f, obejmujący nawiasem symbol x, odpowiada poleceniu „weź x i podnieś go do kwadratu". Polecenie to obejmuje zawartość nawiasu. Możemy to zapisać jako

$$f\left(\square\right) = \square^2 .$$

Jeżeli w okienku pojawi się jakiś symbol, to zostanie on podniesiony do kwadratu. Np. $f(c) = c^2$, $f(a + b) = (a + b)^2$. Natomiast funkcja g oznacza w zadaniu powiększanie o jeden:

$$g\left(\square\right) = \square + 1 .$$

Zatem $g(c) = c+1$ oraz $g(a+b) = a+b+1$. Jeżeli symbole zagnieżdżają się, tak jak np. w wyrażeniu $f(g(x))$, to zaczynając od wewnątrz: bierzemy x, powiększamy o jeden, a następnie podnosimy do kwadratu:

$$f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 ,$$

Zaczynając od zewnątrz: podnosimy do kwadratu $g(x)$, a następnie zastępujemy $g(x)$ przez $x+1$:

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 = (x+1)^2 \; .$$

Zadanie. Niech teraz $F(x,y) = xy + x + y$. Jak zinterpretować poniższe wyrażenia?

$$F(x, F(y,z)) = \qquad\qquad\qquad F(F(x,y),z) =$$

Omówienie. Wyrażenie $F(x,y)$ zawiera dwie zmienne. Symbol F oznacza pewne operacje matematyczne wykonywane na zmiennych x i y. Rola każdej zmiennej jest inna. Nawiązując do podejścia zastosowanego w poprzednim zadaniu możemy napisać:

$$F\left(\square, \bigcirc\right) = \square \cdot \bigcirc + \square + \bigcirc .$$

Czyli zawartości obu zmiennych mnożymy przez siebie i dodajemy je do wyniku mnożenia. Np.

$$F(a, b+c) = a(b+c) + a + (b+c) = ab + ac + a + b + c \; .$$

Albo

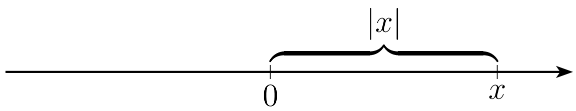
$$\begin{aligned} F(x, F(y,z)) =& x \cdot F(y,z) + x + F(y,z) \\ =& x(yz + y + z) + x + (yz + y + z) \\ =& xyz + xy + xz + x + yz + y + z \\ =& xyz + xy + yz + xz + x + y + z \\ =& (x+1)(y+1)(z+1) - 1 \; . \end{aligned}$$

3.2 Wartość bezwzględna liczby – odległość punktów na osi liczbowej

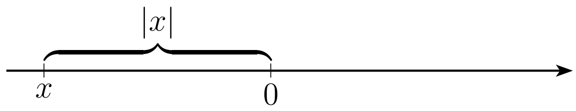
Wartość bezwzględną liczby x możemy zdefiniować jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

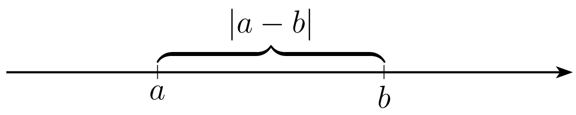
Mamy $|-3| = -(-3) = 3$, $|5| = 5$, $|0| = 0$. Wartość bezwzględną możemy interpretować jako odległość liczby x od 0 na osi liczbowej. ([1])



([1]) W konwencji geometrycznej (analitycznej) utożsamiamy liczby z ich miejscem na osi liczbowej.

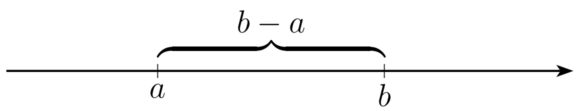


Jeżeli a, b są liczbami na osi liczbowej, to ich odległość możemy obliczyć jako $|a - b|$.



Jeżeli $a < b$, to odległość ta jest równa

$$|a - b| = -(a - b) = b - a$$

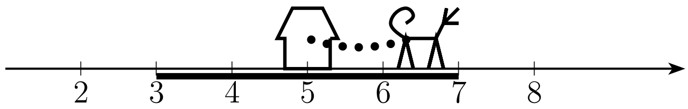


3.3 Pies i kot Zarzyckiego

Humorystyczną metodę rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną udało się podpatrzyć kilka lat temu w programie Manna i Materny. Gościem programu był Pan Wojciech Zarzycki, niekonwencjonalny nauczyciel matematyki ze Staszowa (studiował na UW). Obserwując podwórko swojego sąsiada dokonał obserwacji, że pies wydeptał wokół budy teren zdeterminowany długością łańcucha. Rozważmy na przykład nierówność typu „pies”

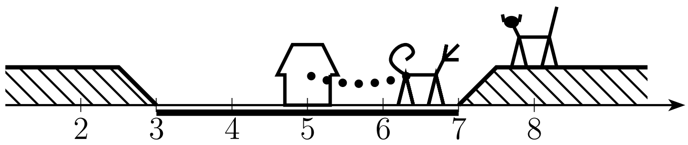
$$|x - 5| < 2$$

Jeżeli budę ustawimy w punkcie 5, a długość łańcucha wynosi 2 i pies znajduje się w punkcie x, to nierówność wyraża fakt, że odległość psa od budy jest zawsze mniejsza od długości łańcucha. Nierówność opisuje zatem teren psa, czyli przedział od 3 do 7.



I wtedy Mann pyta: „co z tym kotem?”. Otóż kot trzyma się zasady, że jego odległość od psa musi być zawsze większa od długości łańcucha, czyli w naszym przykładzie jego teren jest opisany nierównością

$$|x - 5| > 2,$$

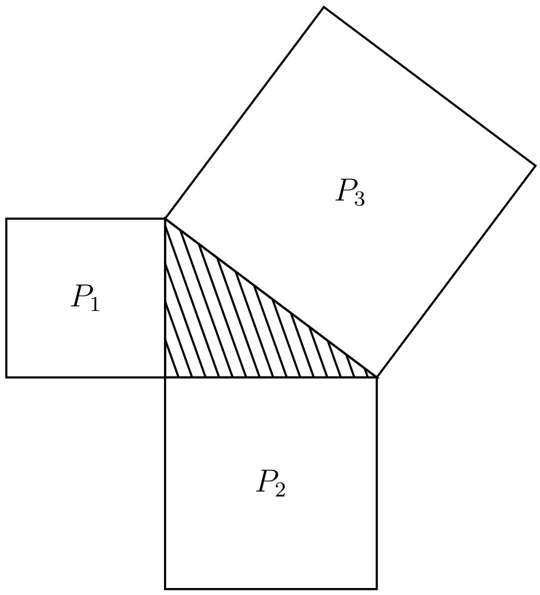


czyli są to dwa przedziały od $-\infty$ do 3 i od 7 do $+\infty$.

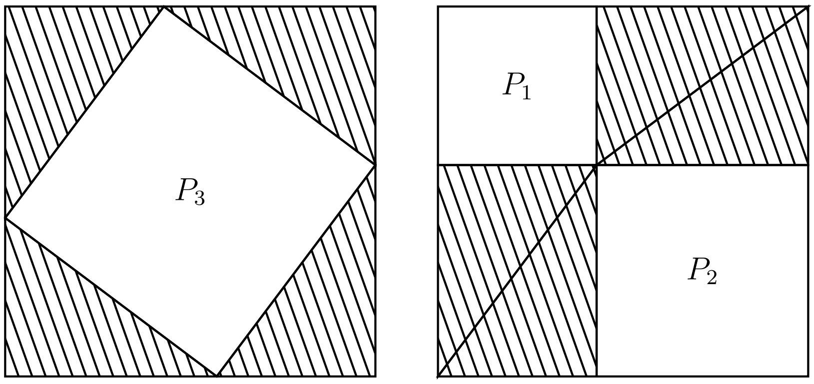
Zanim przejdziemy do odległości punktów na płaszczyźnie, udowodnimy metodą grecką (bez przekształcania wyrażeń)

3.4 Twierdzenie Pitagorasa

Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.



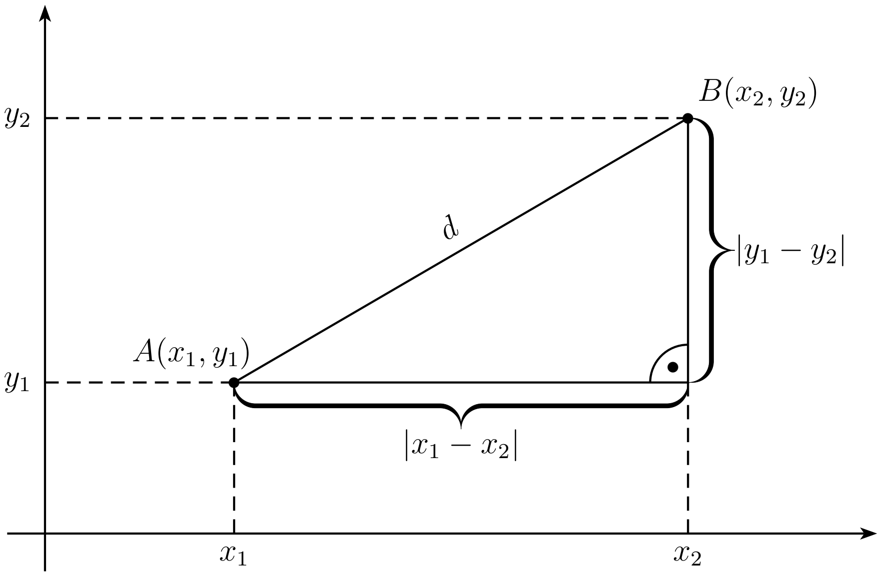
Dowód. Z kwadratu P_3 oraz czterech trójkątów budujemy kwadrat, którego bokiem jest suma przyprostokątnych (lewy rysunek).



Taki sam kwadrat możemy uzyskać z kwadratów P_2, P_3 oraz czterech trójkątów (prawy rysunek). Odejmując „od równego równe" otrzymujemy

$$P_3 = P_1 + P_2.$$

3.5 Wyprowadzenie wzoru na odległość punktów na płaszczyźnie

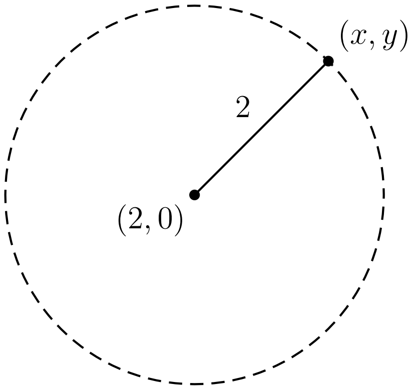


$$d^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$$
$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Kolejność odejmowania liczb w nawiasach nie ma znaczenia.

3.6 Zastosowania: równanie okręgu, symetralna odcinka

Zadanie. Znajdź równanie okręgu o środku $(2,0)$ i promieniu $r=2$.



Rozwiązanie. Na okręgu leżą wszystkie punkty (x,y), których odległość od punktu $(2,0)$ wynosi $r=2$. Zatem punkt (x,y) spełnia warunek

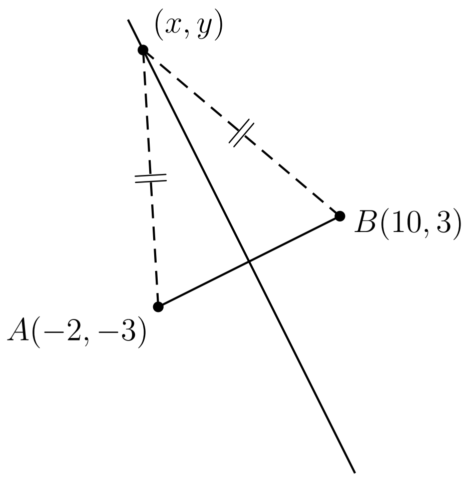
$$(x-2)^2+(y-0)^2=r^2=4$$

skąd

$$x^2-4x+4+y^2=4, \quad x^2+y^2=4x.$$

Zadanie (P-3/8)**.** Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach

$$A(-2,-3) \text{ i } B(10,3)$$



Rozwiązanie. Na symetralnej odcinka AB leży każdy punkt (x,y), który jest jednakowo oddalony od końców. Równość odległości jest równoważna równości ich kwadratów

$$\begin{aligned}
(x+2)^2+(y+3)^2 &= (x-10)^2+(y-3)^2 \\
x^2+4x+4+y^2+6y+9 &= x^2-20x+100+y^2-6y+9 \\
24x+12y-96 &= 0 \\
2x+y-8 &= 0 && \text{równanie ogólne prostej} \\
y &= -2x+8 && \text{równanie kierunkowe prostej}
\end{aligned}$$

3.6.1 Lekcja zwijania wyrażenia z x^2 i z x

„Zwiń”

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

$$x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 2 \cdot 2x + 4) + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

$$x^2 + x + 1 = (x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$-\ x^2\ +\ x\ =\ -\left[x^2 - x\right]\ =\ -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\ =\ -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\ +\ \frac{1}{4}$$

$$2x^2 + x + 1 = 2\left[x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right] =$$
$$2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

Przykład. Znajdź środek i promień okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = y$.

Rozwiązanie.

$$x^2 + y^2 - y = 0$$
$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$
$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Odp. Środek $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; promień $r = \frac{1}{2}$

Zadanie (R-2/1)**.** Dane są punkty $A(3, 0)$ i $B(-3, 0)$. Wyznacz równanie krzywej utworzonej przez wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od punktu A jest 2 razy większa od odległości od punktu B. Jaką figurę opisuje krzywa?

Rozwiązanie. Chcemy wyznaczyć wszystkie punkty $P(x, y)$ takie, że

$$|PA| = 2|PB|$$

Podnosząc (równoważnie) do kwadratu otrzymujemy

$$|PA|^2 = 4|PB|^2$$

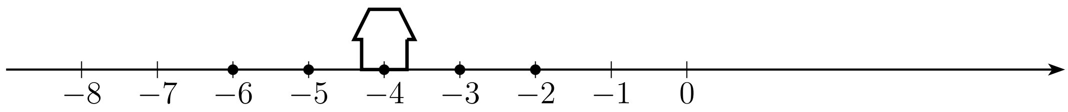
$$(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = 4(x + 3)^2 + 4(y - 0)^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$$
$$-3x^2 - 3y^2 - 30x - 27 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$$
$$(x + 5)^2 - 25 + 9 + y^2 = 0$$
$$(x + 5)^2 + y^2 = 16$$

Odp. Figurą opisaną przez podany warunek jest okrąg o środku $(-5, 0)$ i promieniu $r = 4$.

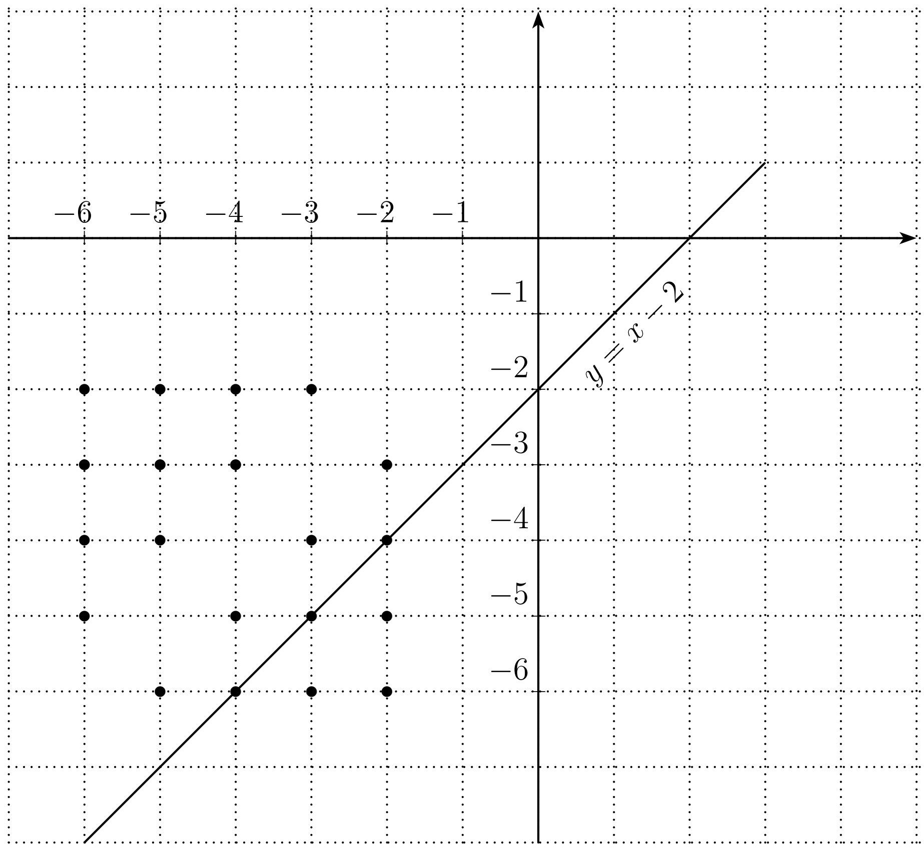
3.6.2 Przykład nawiązujący do rachunku prawdopodobieństwa

Zadanie (R-3/5)**.** Zbiór X składa się z całkowitych rozwiązań nierówności $|x + 4| \leqslant 2$. Ze zbioru X losujemy dwa razy (bez zwracania) po jednej liczbie. Oznaczmy te liczby w kolejności losowania, a oraz b. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – para liczb (a, b) jest rozwiązaniem nierówności $x - y - 2 < 0$.

Rozwiązanie. Mamy $X = \{-6, -5, -4, -3, -2\}$



W układzie rysujemy zbiór par odpowiadających losowaniom opuszczając punkty leżące na prostej $y = x$ (bo losowanie bez zwracania). Nierówność z zadania jest równoważna nierówności $y > x - 2$.



Z rysunku odczytujemy, że $P(A) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

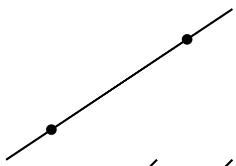
Wykład **4**

Trochę geometrii bez układu współrzędnych

W dzisiejszym wykładzie chcemy nawiązać do metody Euklidesa, który ponad 2 tysiące lat temu w swoich „Elementach” wykładał geometrię wyprowadzając trudniejsze fakty i twierdzenia z prostszych założeń, zwanych postulatami lub aksjomatami.

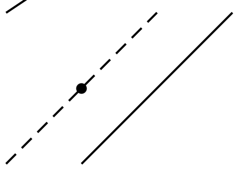
4.1 Przykłady postulatów

Postulat 2:



Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

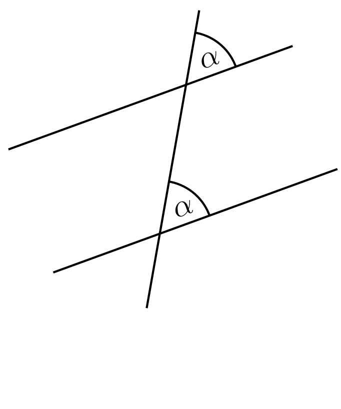
Postulat 5:



Przez punkt nieleżący na prostej przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej.

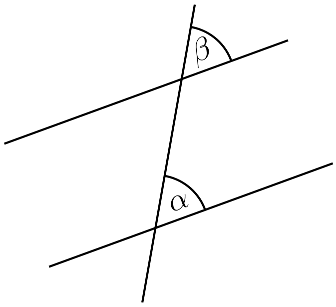
Szkolnym odpowiednikiem piątego postulatu jest założenie, że

- kąty odpowiadające są równe (tutaj dwie proste równoległe przecinamy trzecią prostą)

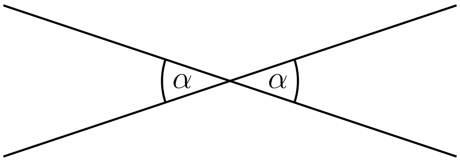


Z faktu tego będziemy chcieli także korzystać „w drugą stronę”.

- Jeżeli $\alpha = \beta$, to proste są równoległe.

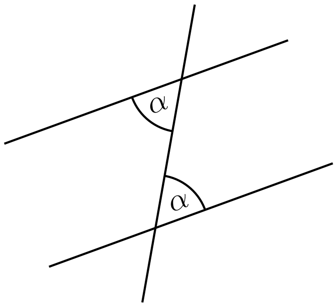


Założeniem „na poziomie postulatu” jest równość kątów wierzchołkowych.



Otrzymamy stąd

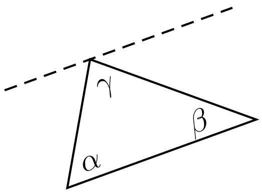
Wniosek. Kąty naprzemianległe są równe.



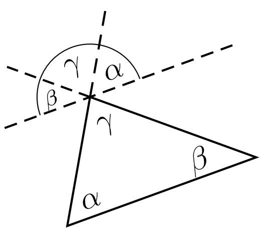
Korzystając z tych prostych założeń, możemy udowodnić

Twierdzenie. Suma kątów trójkąta jest równa 180° (kąt półpełny).

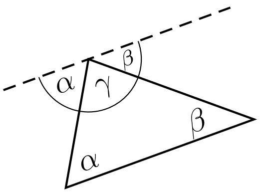
Dowód. Przez wierzchołek prowadzimy prostą równoległą do podstawy (piąty postulat).



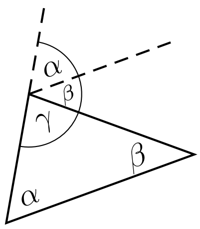
Następnie przenosimy wszystkie kąty trójkąta do wierzchołka, korzystając z równości kątów odpowiadających, naprzemianległych, bądź wierzchołkowych. Trzy najbardziej typowe sposoby rozumowania przedstawione są na rysunkach.



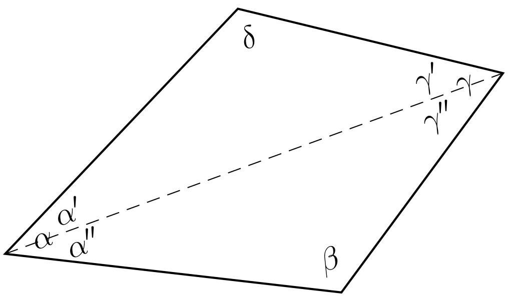
dwa kąty przenosimy odpowiadająco, a trzeci wierzchołkowo



dwa kąty przenosimy naprzemianlegle

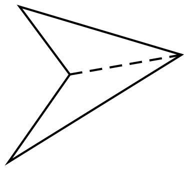


jeden kąt przenosimy odpowiadająco, a jeden naprzemianlegle



Wniosek. Suma kątów dowolnego czworokąta jest równa 360°.

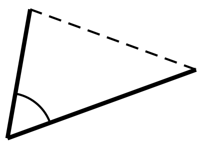
Dowód. Kąty wewnętrzne czworokąta rozbijamy na sumę kątów dwóch trójkątów. Rozumowanie to pozostaje słuszne dla czworokąta wklęsłego.



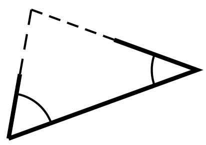
Kolejna grupa postulatów to:

4.2 Cechy przystawania trójkątów

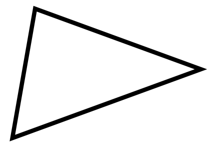
Każdy trójkąt jest naturalnie scharakteryzowany przez sześć parametrów: trzy boki i trzy kąty. Cechy przystawania trójkątów orzekają, że w pewnych sytuacjach wystarczy znać trzy parametry, aby określić pozostałe trzy. Sytuacje te ilustrujemy na rysunkach.



cecha **bkb** (bok-kąt-bok); wystarczy znać dwa boki i kąt między nimi zawarty



cecha **kbk** (kąt-bok-kąt); wystarczy znać bok i dwa kąty do niego przylegające

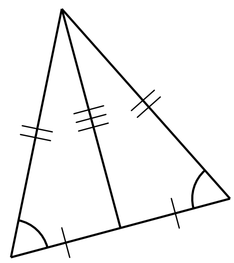


cecha **bbb** (bok-bok-bok); wystarczy znać trzy boki trójkąta (boki określają kąty)

Uwaga. Fizyk powie: „kształt trójkąta ma trzy stopnie swobody”, to znaczy, wystarczą trzy parametry do jednoznacznego opisania kształtu trójkąta.

Fakt. Trójkąt równoramienny ma kąty naprzeciw ramion równe.

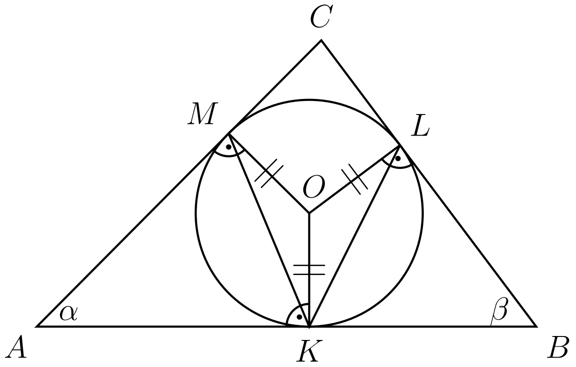
Dowód (według podpowiedzi Marcina Brauna). Z wierzchołka prowadzimy środkową, to znaczy prostą łączącą wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Korzystając z cechy **bbb** uzasadniamy równość kątów.



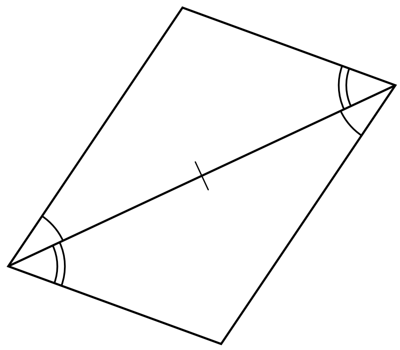
Uwaga. Możemy też poprowadzić z wierzchołka dwusieczną, to znaczy prostą rozdzielającą kąt na dwie równe części

Uwaga. Poprowadzenie wysokości, to pułapka!!! Nie da się skończyć rozumowania!!!

Zadanie (R-6/3)**.** W trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$, wpisano okrąg. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC. Wykaż, że $|\sphericalangle MKL| = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

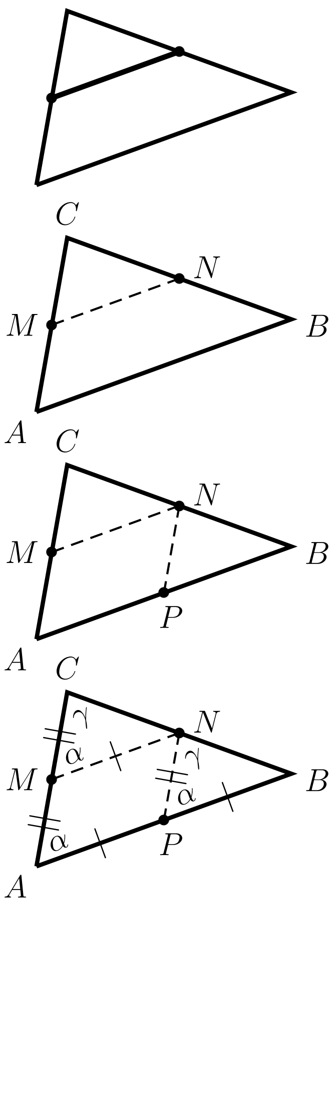


Rozwiązanie. Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego. Korzystając z sumy kątów czworokąta obliczamy $|\sphericalangle KOM| = 360 - 90 - 90 - \alpha = 180 - \alpha$. Stąd $|\sphericalangle OKM| = \frac{180-(180-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Podobnie $|\sphericalangle OKL| = \frac{\beta}{2}$. Stąd $|\sphericalangle MKL| = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



Fakt. Równoległobok ma przeciwległe boki równe

Dowód. Rysujemy przekątną i korzystając z równoległości dwóch par boków zaznaczamy dwie pary równych kątów naprzemianległych. Przekątna jest wspólnym bokiem, więc korzystając z cechy przystawania **kbk** uzasadniamy równość przeciwległych boków.

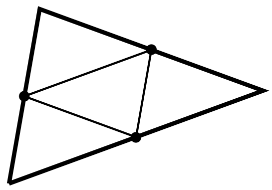


Twierdzenie (o odcinku łączącym środki boków)**.** Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego i równy jego połowie.

Dowód. Oznaczmy trójkąt ABC i niech M będzie środkiem boku AC. Przez punkt M prowadzimy prostą równoległą do AB. Prosta ta przecina bok BC w punkcie N. Nie wiemy jeszcze, czy jest to środek boku?
Z kolei z punktu N prowadzimy prostą równoległą do AC, która przecina podstawę AB w punkcie P. Otrzymujemy równoległobok $APNM$ Mamy

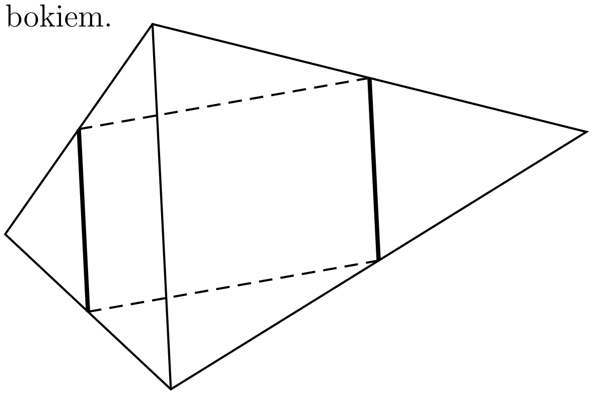
$$|CM| = |MA| = |NP|.$$

Teraz korzystając z równoległości zaznaczamy 3 kąty odpowiadające α oraz 2 kąty odpowiadające γ. Korzystając z cechy **kbk** uzasadniamy, że trójkąty NCM i BNP są przystające. Dopiero w tym momencie pokazaliśmy, że N jest środkiem odcinka BC. Zatem odcinek łączący środki boków jest równoległy do trzeciego. Na koniec zauważymy, że $|AP| = |MN|$ z własności równoległoboku oraz $|MN| = |PB|$ z udowodnionego przystawania trójkątów. Wynika stąd, ze P jest środkiem boku oraz $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$.



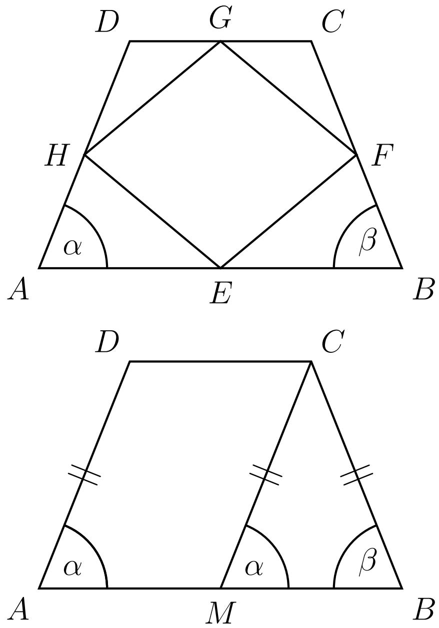
Uwaga. Dorysowując jeszcze MP otrzymujemy podział trójkąta na 4 trójkąty przystające.

Twierdzenie. Czworokąt łączący środki boków dowolnego czworokąta jest równoległobokiem.



Dowód. Wystarczy pokazać, że przeciwległe boki tego czworokąta są równoległe. Dorysowujemy przekątną i stosujemy poprzednie twierdzenie. Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla drugiej pary boków.

Zadanie (P-5/7)**.** W trapezie równoramiennym $ABCD$ połączono kolejne środki boków i otrzymano czworokąt EFGH. Uzasadnij, że czworokąt ten jest rombem.



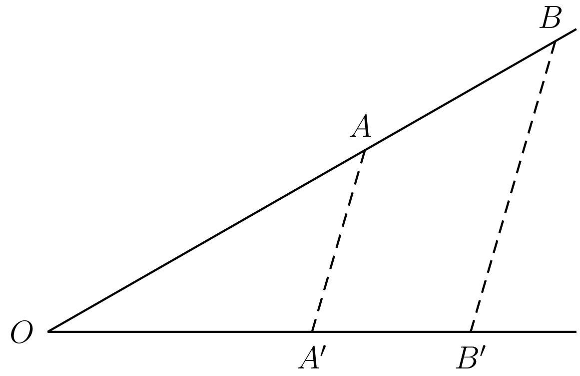
Rozwiązanie. Wiemy już, że czworokąt $EFGH$ jest równoległobokiem. Dla zakończenia rozumowania wystarczy pokazać, że

$$|HE| = |EF|$$

To z kolei wyniknie z cechy **bkb**, o ile pokażemy, że kąty DAB oraz ABC są równe. W tym celu obierzemy punkt M na podstawie AB tak, żeby otrzymać równoległobok $AMCD$. Kąty DAB i CMB są równe jako odpowiadające. Ponieważ trapez jest równoramienny, więc z własności równoległoboku $|MC| = |AD| = |BC|$, czyli trójkąt MBC jest równoramienny, skąd $\alpha = \beta$.

4.3 Twierdzenie Talesa i podobieństwo trójkątów

Twierdzenie Talesa wprowadza do geometrii nową jakość. Cechy przystawania trójkątów nie wystarczą do dowodu twierdzenia Talesa. Dodatkowym poziomem postulatów, w ramach których można udowodnić twierdzenie Talesa są np. podstawowe wzory na pole prostokąta i trójkąta. Dowód ten proponujemy jako ćwiczenie (Dodatek A.1). Poniższe sformułowanie jest jednym z wielu możliwych.



Twierdzenie (Talesa)**.** Proste równoległe odcinają na dwóch przecinających się prostych proporcjonalne odcinki

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

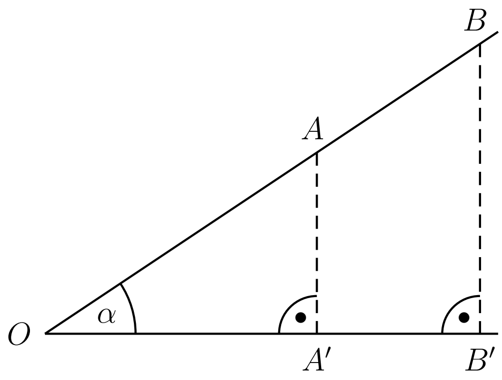
Poprzez czysto algebraiczne obliczenia otrzymamy proporcje

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}\,.$$

4.3.1 Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Dzięki twierdzeniu Talesa można poprawnie zdefiniować funkcje trygonometryczne. Twierdzenie Talesa orzeka, że definicja funkcji trygonometrycznej jest niezależna od wielkości trójkąta

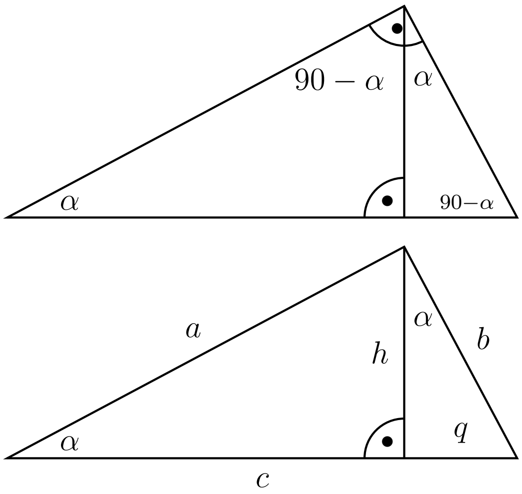
Przykład. Definicja funkcji trygonometrycznych



$$\sin\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{|AA'|}{|OA|} = \frac{|BB'|}{|OB|}$$
$$\cos\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$$
$$\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{|AA'|}{|OA|} = \frac{|BB'|}{|OB'|}$$

Głównym wnioskiem z twierdzenia Talesa jest cecha **kkk** podobieństwa trójkątów, tzn. trójkąty o takich samych kątach mają proporcjonalne boki.

4.4 Ważne wnioski z podobieństwa dla trójkątów prostokątnych



Jeżeli w trójkącie prostokątnym opuścimy wysokość na przeciwprostokątną, to otrzymamy trzy trójkąty podobne (**kkk**).
W oznaczeniach z rysunku mamy proporcje

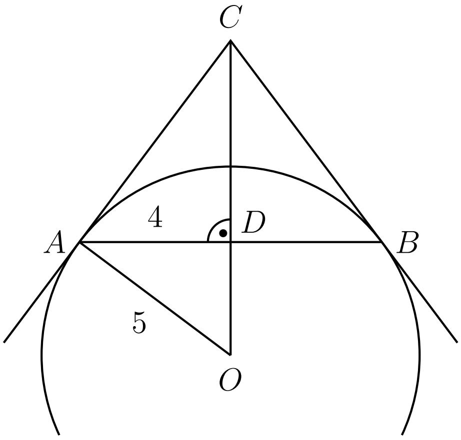
(i) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ skąd $h^2 = pq$

(ii) $\cos\alpha = \frac{p}{a} = \frac{a}{c}$ skąd $a^2 = cp$

(iii) $\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ skąd $b^2 = cq$

Dodając stronami (ii) oraz (iii) dostajemy inny dowód twierdzenia Pitagorosa $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p+q) = c^2$.

Zadanie (P-1/8)**.** W trójkącie równoramiennym podstawa AB ma długość 8 cm. Promień okręgu stycznego w punktach A i B do prostych zawierających ramiona AC i BC trójkąta, ma długość 5 cm. Oblicz pole trójkąta ABC.

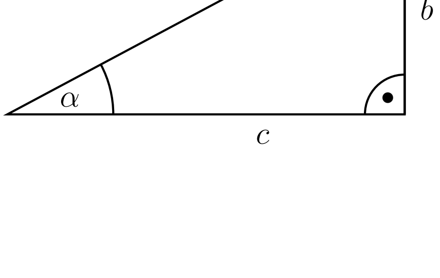


Rozwiązanie. Niech O będzie środkiem okręgu. Prosta OC jest symetralną boku AB i przecina ten bok w punkcie D, który jest spodkiem wysokości. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $|OD| = 3$. Korzystając z własności (I) trójkąta prostokątnego AOC mamy

$$3|CD| = 4^2 = 16\,,\ |CD| = \frac{16}{3}\,.$$

Stąd szukane pole trójkąta wynosi $\frac{1}{2}|AB||CD| = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{16}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}\,\mathrm{cm}^2$.

Przykład. Skąd się wzięła jedynka trygonometryczna?



Dla trójkąta prostokątnego o bokach a, b, c (c przeciwprostokątna) zapiszmy twierdzenie Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2\,.$$

Dzieląc obustronnie przez c^2 otrzymamy

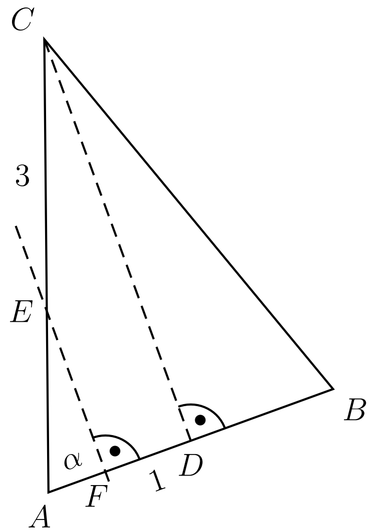
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1\,,$$

skąd po zmianie kolejeności

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Wniosek. Jedynka trygonometryczna jest formą zapisu twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie (P-4/11)**.** W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono prostą prostopadłą do boku AB, przecinającą bok AC w punkcie E i bok AB w punkcie F. Punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu C. Wiedząc, że $|EC| = 3$, $|FD| = 1$, oblicz sinus kąta CAB.



Rozwiązanie. Z twierdzenia Talesa

$$\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|FD|}{|EC|} = \frac{1}{3}\,.$$

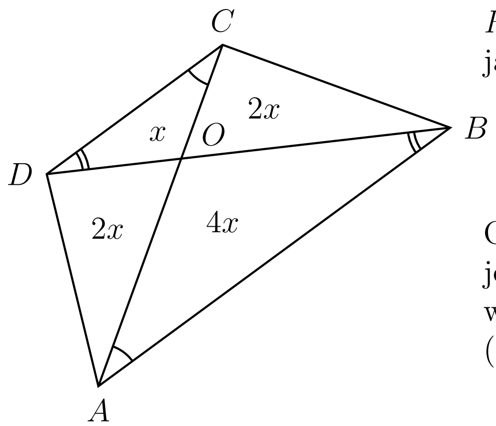
Z jedynki trygonometrycznej

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

4.5 Sztuczki z polami

Jeżeli trójkąty mają jednakowe wysokości, to proporcja pól jest równa proporcji podstaw.

Zadanie (R-5/6)**.** Pole trapezu jest równe P, a stosunek długości podstaw trapezu wynosi 2. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.



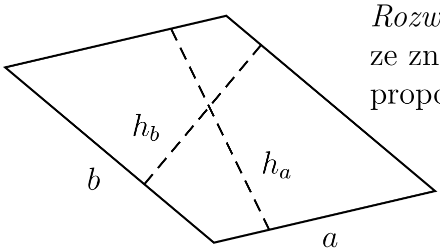
Rozwiązanie. Przy oznaczeniach z rysunku korzystając z podobieństwa trójkątów mamy

$$2 = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|OA|}{|OC|}\,.$$

Oznaczmy przez „x” pole trójkąta OCD. Pole AOD jest dwa razy większe (wspólna wysokość, dwa razy większa podstawa); analogicznie pole trójkąta OBC (wspólna wysokość, dwa razy większa podstawa).

Otrzymujemy $x + 2x + 2x + 4x = P$, skąd $x = \frac{1}{9}P$. Zatem $P_{OCD} = \frac{1}{9}P$, $P_{AOD} = P_{OBC} = \frac{2}{9}P$ i $P_{OAB} = \frac{4}{9}P$.

Zadanie (P-2/5)**.** Obwód równoległoboku wynosi 96 cm, a stosunek długości wysokości równoległoboku jest równy 5 : 7. Oblicz długości boków równoległoboku.



Rozwiązanie. Kluczem w rozwiązaniu zadanie jest obserwacja, ze znajomość proporcji wysokości przenosi się na (odwrotną) proporcję boków:

$$ah_a = bh_b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a} = \frac{5}{7}$$

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 7a = 5b \\ 2(a+b) = 96 \end{cases},$$

skąd $a = 20$, $b = 28$.

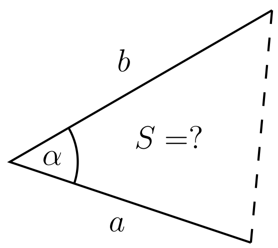
Wykład **5**

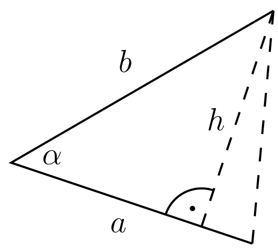
Wokół cech przystawania trójkątów, kąty w okręgu

Dzisiaj kontynuujemy temat geometrii bez układu współrzędnych. Rozszerzymy funkcje trygonometryczne do kątów rozwartych. Przypomnimy twierdzenie cosinusów, sinusów i twierdzenie o kątach w okręgu. Na końcu rozwiążemy trudne zadanie z geometrii.

5.1 Pole trójkąta, sinus kąta rozwatego

Przypomnijmy cechę **bkb**. Wynika z niej, że mając dane dwa boki trójkąta i kąt pomiędzy nimi, możemy już wszystko o tym trójkącie powiedzieć, gdyż parametry te określają trójkąt jednoznacznie. W szczególności powinien istnieć wzór na pole trójkąta zależny od długości boków a, b i kąta α pomiędzy nimi.





Zadanie to nie jest trudne. Opuszczamy wysokość h na bok a i mamy:

$$\frac{h}{b} = \sin\alpha, \text{ skąd } h = b\sin\alpha \text{ i wtedy}$$

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy dla kąta ostrego.

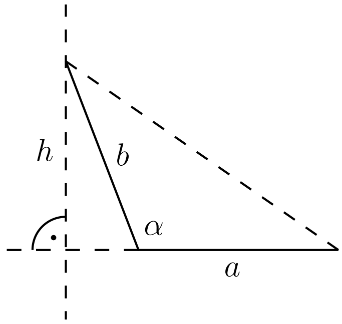
Jeżeli α jest kątem rozwartym, to $180° - \alpha$ jest kątem ostrym i wtedy analogicznie otrzymamy:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - \alpha)$$

Zamiast dwóch wzorów mielibyśmy jeden, gdybyśmy przyjęli:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Czyli geometria jak gdyby sama nam podpowiada, jak należy zdefiniować sinus kąta rozwartego.



Ponieważ dla $\alpha = 90^\circ$ otrzymujemy pole $S = \frac{1}{2}ab$, więc warto przyjąć $\sin 90^\circ = 1$. Ponieważ dla $\alpha = 0^\circ$ oraz dla $\alpha = 180^\circ$ pole znika, więc warto przyjąć

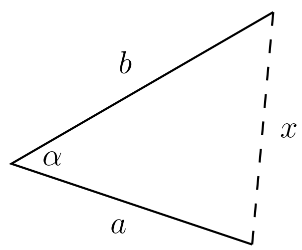
$$\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0.$$

Otrzymaliśmy jednolity wzór:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha, \text{ dla } 0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ.$$

Innym zadaniem, wynikającym z cechy przystawania **bkb**, jest obliczanie długości „x" na podstawie danych a, b, α. Zadanie to umiemy rozwiązać w szczególnym przypadku dla $\alpha = 90^\circ$. Wtedy z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = a^2 + b^2.$$



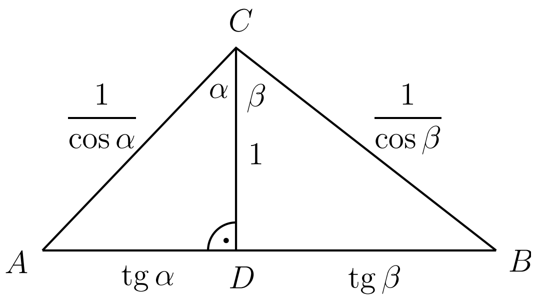
W ogólnym przypadku mamy tzw. ***wzór cosinusów***:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Wyprowadzenie wzoru proponujemy jako ćwiczenie (Dodatek A.3). Analiza różnych przypadków doprowadzi nas do zdefiniowania cosinusa dla $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Zadanie. Jakie wzory na pole trójkąta odpowiadają cechom **bbb** i **kbk**?

5.2 Zastosowanie wzoru $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$



Z wzoru tego możemy stosunkowo łatwo otrzymać wzór na $\sin(\alpha+\beta)$. Wyjaśnijmy oznaczenia na rysunku. Zakładamy dla ułatwienia, że $|CD| = 1$. Mamy:

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \cos\alpha \quad \text{skąd} \quad |AC| = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Analogicznie $|BC| = \frac{1}{\cos\beta}$.

Z kolei $\frac{|AD|}{|DC|} = \operatorname{tg}\alpha$, więc $|AD| = \operatorname{tg}\alpha$ i analogicznie $|BD| = \operatorname{tg}\beta$. Zapisując pole na dwa różne sposoby mamy:

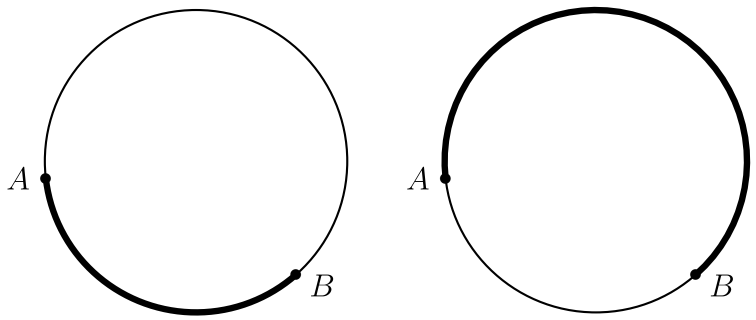
$$\frac{1}{2}|AC||BC|\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|AB||CD|$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot 1$$

Mnożąc obustronnie przez $2\cos\alpha\cos\beta$ otrzymamy:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \tag{5.1}$$

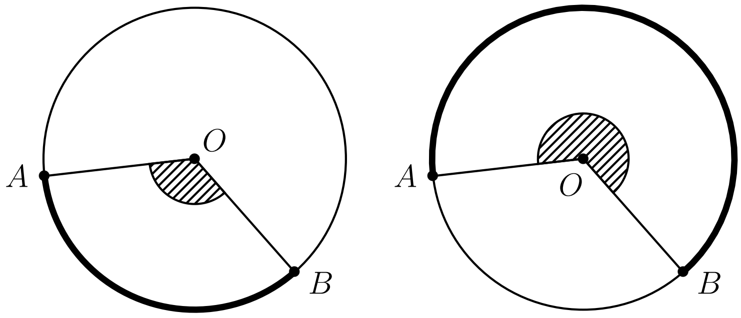
5.3 Twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym

Jest to ważne i ciekawe twierdzenie, które ma wiele zaskakujących konsekwencji. Kilka z nich poznamy podczas wykładu. Zacznijmy od pojęcia łuku.

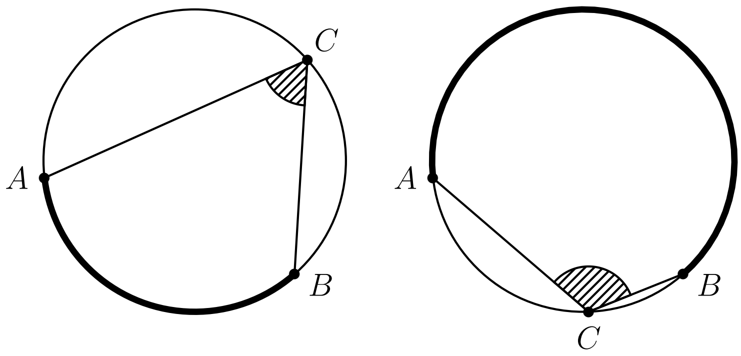


Jeżeli na okręgu obierzemy dwa różne punkty A i B, to okrąg zostanie podzielony na dwa łuki. Same punkty nie wskazują jednoznacznie łuku, dlatego będziemy pogrubiać linię, dla wskazania, o który łuk chodzi.

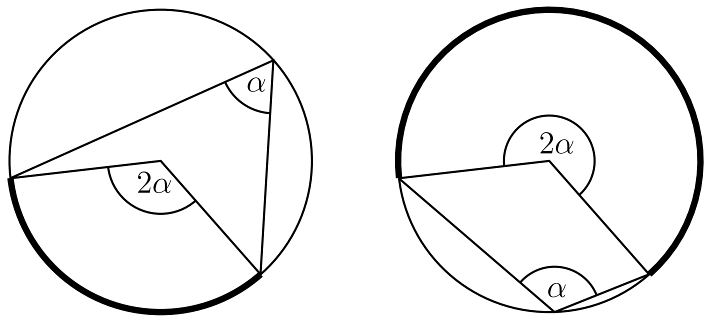
Kątem środkowym opartym na łuku nazywamy kąt AOB, wskazywany przez łuk, gdzie O jest środkiem koła.



Z kolei *kątem wpisanym* opartym na łuku nazywamy kąt ACB, gdzie C jest dowolnym punktem okręgu nieleżącym na łuku.

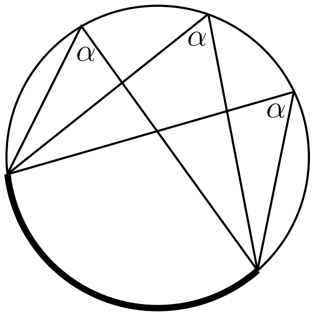


Twierdzenie. Kąt wpisany jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Innymi słowy: kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego.



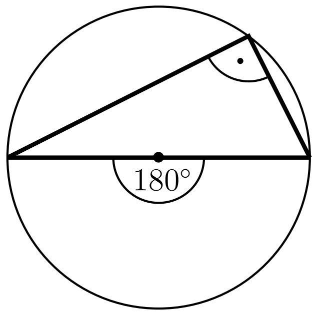
Dowód twierdzenia nie jest trudny (Dodatek A.2). Teraz odnotujmy kilka wniosków.

Wniosek. Wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.



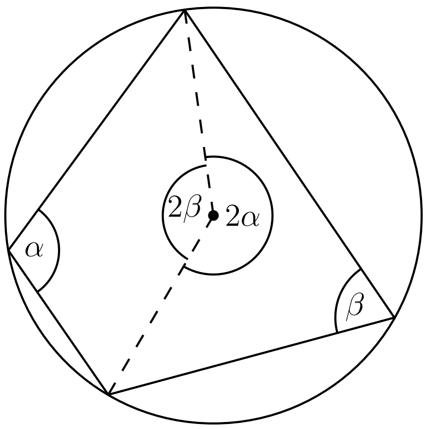
Bo są równe połowie wspólnego kąta środkowego!

Wniosek. Kąt oparty na średnicy jest prosty.



Uwaga. Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży w środku przeciwprostokątnej.

Wniosek. Jeżeli na czworokącie można opisać okręg, to suma przeciwległych kątów wynosi 180°.



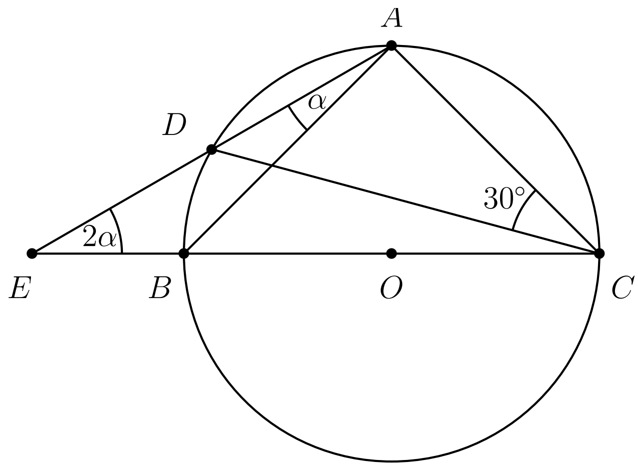
Dowód. Jeżeli przeciwległe kąty oznaczymy przez α i β, to korzystając z twierdzenia o kątach mamy:

$$2\alpha + 2\beta = 360°,$$

skąd

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Przykład (P-4/6)**.** Punkt O jest środkiem okręgu. Wykorzystaj dane na poniższym rysunku i oblicz kąt α.



Rozwiązanie. Kąt BAC jest prosty, jako oparty na średnicy, zaś kąty DAB i DCB są równe, jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku DB (krótkim). Zapisując sumę kątów trójkąta ECA

$$2\alpha + \overbrace{\alpha + 30^\circ}^{\text{kąt } ECA} + \overbrace{90^\circ + \alpha}^{\text{kąt } CAE} = 180^\circ$$

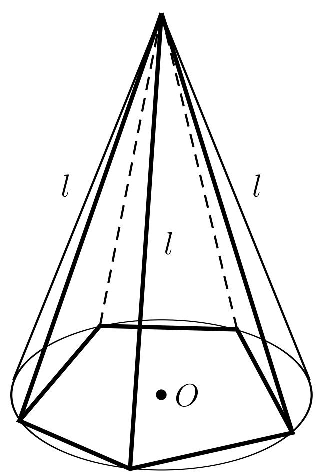
otrzymujemy

$$4\alpha + 120^\circ = 180^\circ, \quad \text{skąd} \quad \alpha = 15^\circ.$$

5.4 Ostrosłup o równych krawędziach

Fakt. Jeśli ostrosłup ma równe krawędzie, to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg. Ponadto spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem tego okręgu.

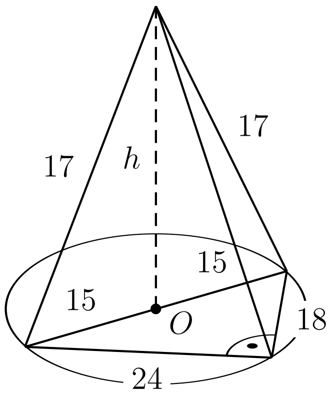
Uzasadnienie. Skoro ostrosłup ma równe krawędzie, to znaczy, że można na nim opisać stożek.



Jako przykład rozwiążmy zadanie:

Zadanie (P-2/9)**.** Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 17 cm. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 18 cm i 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie. Ponieważ ostrosłup ma równe krawędzie więc wierzchołek opada na środek okręgu opisanego na podstawie, czyli na środek przeciwprostokątnej.



Ma ona

$$\sqrt{18^2 + 24^2} = 30 \text{ cm},$$

skąd jej połowa ma 15 cm. Zatem wysokość ostrosłupa wynosi

$$h = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ cm}.$$

Stąd otrzymujemy objętość

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18\right) \cdot 8 = 576 \text{ cm}^3.$$

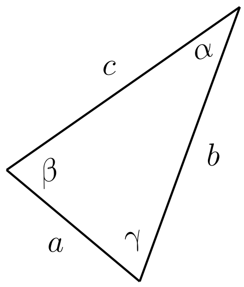
5.5 Twierdzenie sinusów

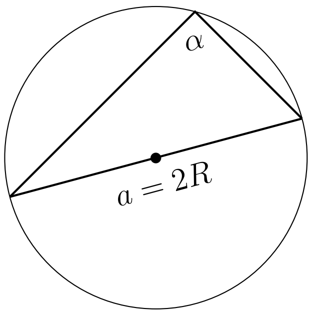
Jest to ważne twierdzenie przydatne w rozwiązywaniu trójkątów.

Twierdzenie (sinusów)**.** Oznaczmy przez a, b, c długości boków trójkąta oraz odpowiednio α, β, γ leżące naprzeciw boków kąty. Wówczas zachodzi równość

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie.



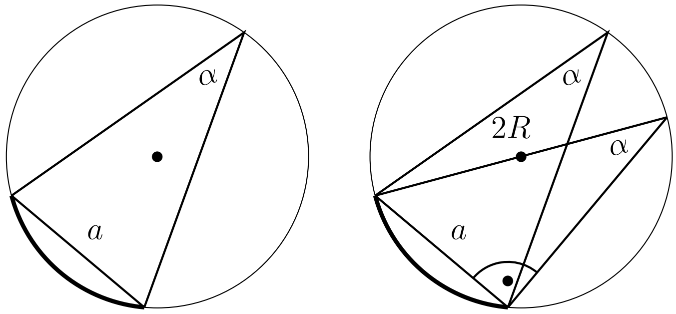


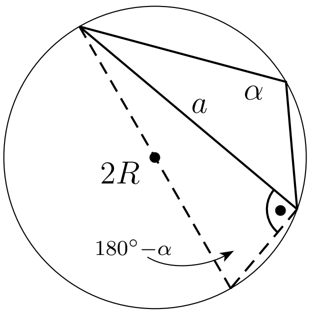
Dowód. Zauważmy, że wzór wystarczy sprawdzić dla któregokolwiek z boków, np. $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, bo rozumowanie dla pozostałych boków będzie analogiczne. Rozważymy trzy przypadki. Jeżeli α jest kątem prostym, to mamy $a = 2R$, czyli wzór zachodzi, bo $\sin 90^\circ = 1$.

Jeżeli α jest kątem ostrym, to kąt środkowy odpowiadający kątowi wpisanemu α jest mniejszy od 180°. Wówczas można wybrać inny kąt wpisany oparty na tym samym łuku, w ten sposób, żeby jedno z jego ramion było średnicą.

Kąt wpisany jest równy α; kąt oparty na średnicy jest prosty, więc otrzymujemy

$$\frac{a}{2R} = \sin\alpha, \quad \text{skąd} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$





Jeśli α jest rozwarty, to nie da się powtórzyć poprzedniego rozumowania. Można natomiast wybrać kąt wpisany oparty na łuku dopełniającym taki, że jedno z jego ramion jest średnicą (kąt ma $180^\circ - \alpha$ z własności czworokąta). Mamy

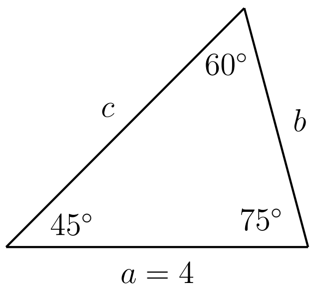
$$\frac{a}{2R} = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Zadanie (R-10/7)**.** Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego jeden bok ma długość 4, a kąty przyległe do tego boku mają miary 75° i 45°. Wysokość ostrosłupa jest równa promieniowi koła opisanego na podstawie. Oblicz objętość ostrosłupa. Wynik podaj w postaci $a + b\sqrt{c}$ $(a, b, c$ wymierne).

Rozwiązanie. Obliczamy, że trzeci kąt trójkąta ma 60°. Przyjmując oznaczenia tak, jak na rysunku mamy z twierdzenia sinusów

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ} = 2R$$

gdzie R jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie.
Obliczamy stąd



$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } b = \frac{4\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Z poznanego wzoru obliczamy

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) =$$
$$\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Z wzoru na pole trójkąta obliczamy pole podstawy

$$P = \frac{1}{2}ab\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3}.$$

Wiedząc, że wysokość ostrosłupa wynosi R obliczamy objętość

$$V = \frac{1}{3}Ph = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16(\sqrt{3}+1)}{9}.$$

Wynik zapisujemy w postaci, o którą prosił autor zadania

$$V = \frac{16}{9} + \frac{16}{9}\sqrt{3}.$$

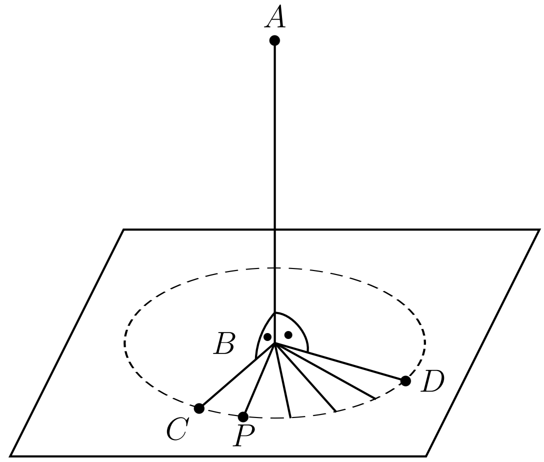
Wykład 6

Kąty w przestrzeni; wektory i układy współrzędnych

Geometrii poświęciliśmy dwa ostatnie wykłady. Ponieważ nie będzie już wiele czasu na geometrię zaakcentujemy dzisiaj trzy ważne aspekty geometrii przestrzennej. Później wrócimy do pojęcia układu współrzędnych, który pojawił się już w wykładzie 2 i 3. Tym razem wprowadzimy to pojęcie w sposób pogłębiony z pomocą wektorów. Omówimy przesuwanie wykresów, co zastosujemy do wykresów funkcji.

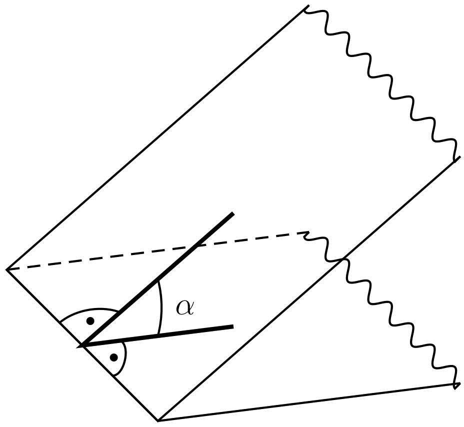
6.1 Kąty w przestrzeni

Mamy następujący warunek wystarczający prostopadłości odcinka i płaszczyzny. Zakładamy, że koniec B odcinka leży na płaszczyźnie oraz, że istnieją punkty C i D na płaszczyźnie, wyznaczające różne kierunki względem B takie, że kąty CBA i DBA są proste. Wówczas dla dowolnego punktu P na płaszczyźnie (różnego od B), odcinki AB i BP są prostopadłe.

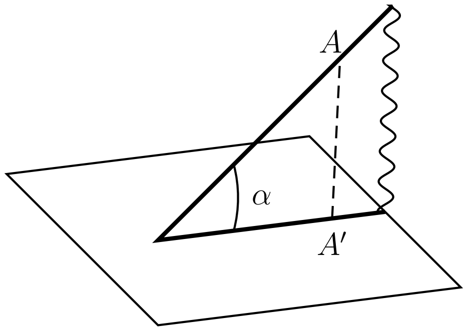


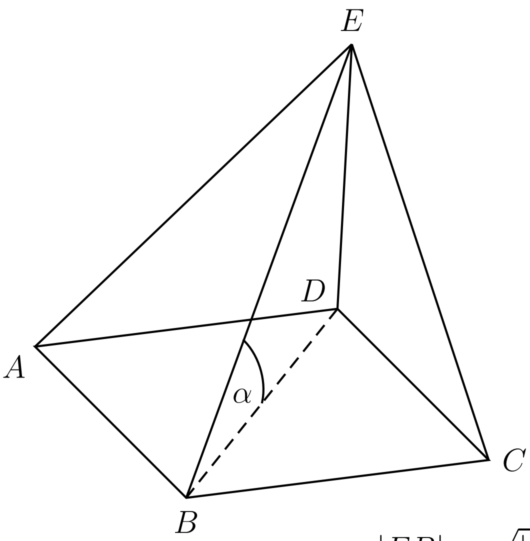
Przykład. (P-1/6) Ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest kwadrat o boku 4, ma dwie przyległe ściany boczne prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Pozostałe dwie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wyznacz cosinus kąta, jaki tworzy najdłuższa krawędź boczna ostrosłupa z płaszczyzną podstawy.

Uwaga. Kąt dwuścienny pomiędzy dwoma płaszczyznami odczytujemy pomiędzy odcinkami prostopadłymi do krawędzi przecięcia płaszczyzn.



Uwaga. Kąt pomiędzy prostą i płaszczyzną jest to kąt pomiędzy tą prostą i jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.





Rozwiązanie (P-1/6). Z warunków zadania możemy założyć, że przy wierzchołku D spotykają się kąty proste. Zatem odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny ściany ADE. Odcinek AB (jako równoległy do DC) jest także prostopadły do tej płaszczyzny, zatem kąt EAB jest prosty. Więc kąt EAD jest równy kątowi dwuściennemu $45°$. Czyli trójkąt ADE jest równoramienny (kąty $45°, 90°, 45°$), zatem $|AD| = |DE| = 4$. Stąd $|AE| = 4\sqrt{2}$. Następnie

$$|EB| = \sqrt{|AB|^2 + |AE|^2} = 4\sqrt{3}.$$

Odcinek DB jest przekątną kwadratu, więc $|DB| = 4\sqrt{2}$. Ostatecznie

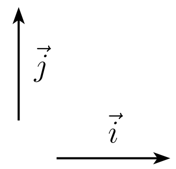
$$\cos\alpha = \frac{|DB|}{|EB|} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

6.2 Wektory i układy współrzędnych

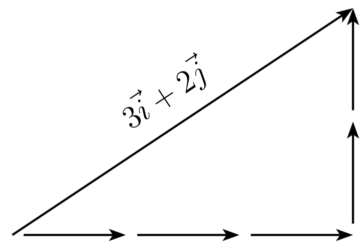
O wektorach wspominaliśmy podczas drugiego wykładu podając je jako przykład algebraizacji geometrii (działania wykonujemy na obiektach geometrycznych). Naszym celem jest zrozumieć przeliczanie współrzędnych podczas przesuwania układu współrzędnych. Aby to uzyskać korzystnie jest głębiej zrozumieć współrzędne wektora oraz punktu.

6.2.1 Współrzędne wektora

Aby zdefiniować współrzędne wektora musimy ustalić na płaszczyźnie dwa nierównoległe wektory $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ zwane wektorami bazowymi lub krótko: bazą. Ustalamy, który z wektorów jest pierwszy. Dla wygody zakładamy, że wektory te mają jednostkową długość oraz, że są wzajemnie prostopadłe (założenie to nie jest konieczne).



Z wektorów bazowych możemy „wyprodukować” każdy inny wektor leżący na płaszczyźnie za pomocą działań: dodawania i mnożenia przez skalar, np.



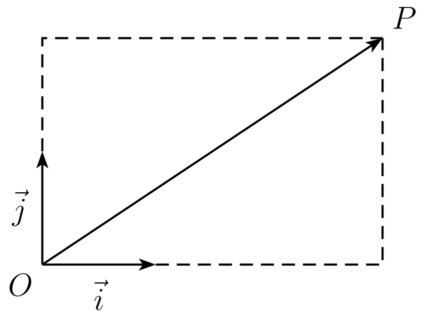
Ogólnie każdy wektor $\overrightarrow{v}$ możemy jednoznacznie zapisać w postaci $\overrightarrow{v} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$. Jeżeli baza jest ustalona to piszemy krótko $\overrightarrow{v} = [x, y]$, rezerwując nawias kwadratowy dla oznaczenia wektorów.

Własności. Jeżeli $\overrightarrow{u} = [a, b]$ i $\overrightarrow{v} = [c, d]$, to

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [a + c, b + d], \qquad \lambda\overrightarrow{u} = [\lambda a, \lambda b].$$

6.2.2 Współrzędne punktu

Aby określać współrzędne punktu musimy oprócz bazy $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ ustalić jeszcze jakiś punkt odniesienia O, który będzie początkiem układu (O jak obserwator). Wtedy położenie dowolnego punktu P możemy scharakteryzować za pomocą wektora wodzącego $\overrightarrow{OP}$.



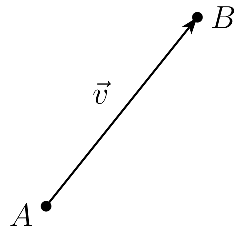
Określając współrzędne wektora $\overrightarrow{OP}$ w bazie otrzymujemy $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$. Zatem przyjmujemy, że współrzędne punktu są to współrzędne jego wektora wodzącego. Dla odróżnienia współrzędne punktu zapisujemy z użyciem nawiasów okrągłych $P(x, y)$.

Własność. Wektor łączący punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ma współrzędne

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1].$$

Uwaga. Do punktu możemy dodać wektor. Wynikiem dodawania jest punkt przesunięty o wektor. Jeżeli dane są współrzędne $A(x,y)$, $\overrightarrow{v} = [p,q]$, to

$$B = A + \overrightarrow{v} = (x+p, y+q).$$

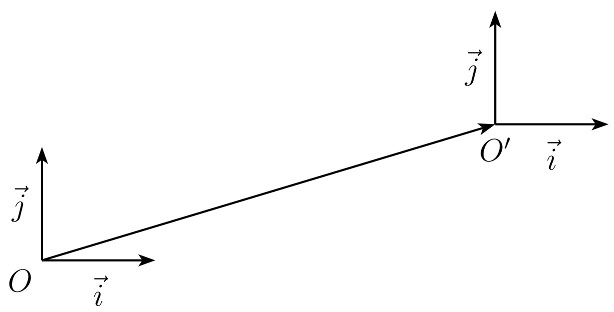


$B = A + \vec{v}$

6.3 Przesunięcie układu współrzędnych

Zmiana układu współrzędnych odpowiada fizycznej „zmianie obserwatora”. Pojęcie zmiany układu współrzędnych jest fundamentalnym pojęciem zarówno w fizyce, jak i w matematyce. Tutaj zajmujemy się najprostszymi zmianami – przesunięciami.

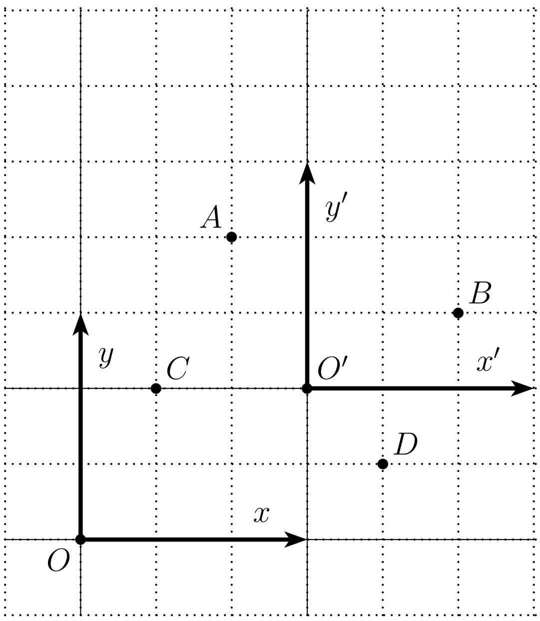
Uwaga. Podczas przesuwania układu bazę $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ pozostawiamy niezmienioną; zmienia się tylko położenie obserwatora z O na O'.



oznaczmy $\overrightarrow{OO'} = [p,q]$

6.3.1 Jak się zmieniają współrzędne podczas przesuwania?

Każdy punkt P na płaszczyźnie może być obserwowany zarówno przez obserwatora O, jak również przez obserwatora O'. Przyjmujemy, że obserwator nieprimowany „widzi” współrzędne (x,y), zaś obserwator primowany widzi współrzędne (x',y') tego samego punktu.



Przykład. Przypuśćmy, że obserwator O' ma współrzędne $(3, 2)$ w układzie nieprimowanym. Określamy współrzędne punktów A, B, C, D, O, O' w obu układach.

	(x, y)	(x', y')
A	$(2, 4)$	$(-1, 2)$
B	$(5, 3)$	$(2, 1)$
C	$(1, 2)$	$(-2, 0)$
D	$(4, 1)$	$(1, -1)$
O	$(0, 0)$	$(-3, -2)$
O'	$(3, 2)$	$(0, 0)$

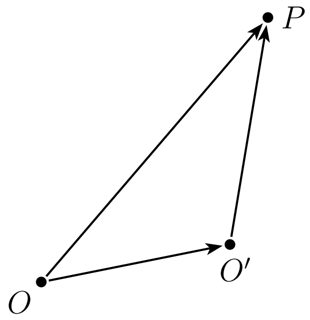
Zauważmy

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

6.3.2 Rozumowanie ogólne (trójkąt obserwacyjny)

Mamy $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$. Przechodząc do współrzędnych w bazie otrzymujemy

$$[x, y] = [p, q] + [x', y'] = [p + x', q + y'],$$

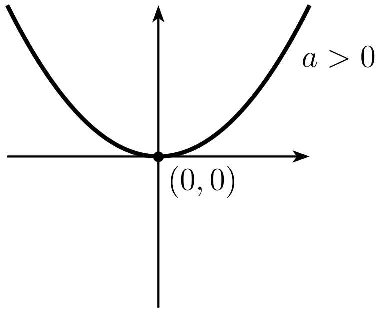


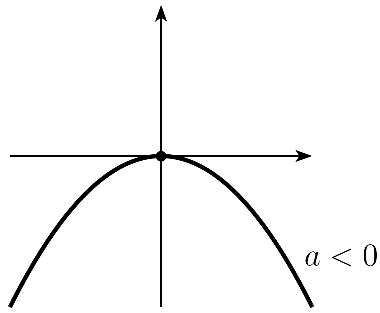
czyli

$$\begin{cases} x = x' + p \\ y = y' + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - p \\ y' = y - q \end{cases} \tag{6.1}$$

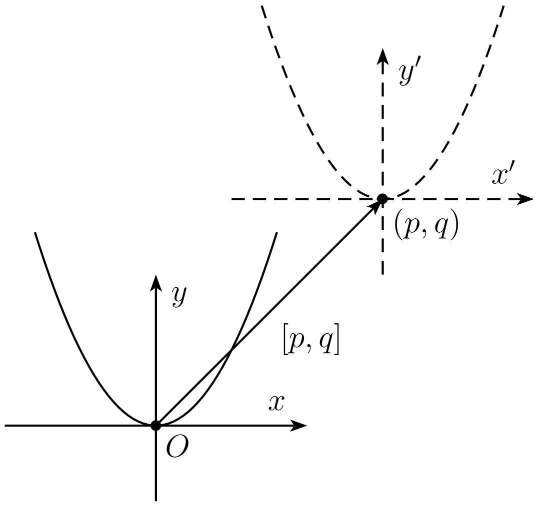
6.4 Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego

Przykład. Rozważmy parabolę $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, której wierzchołek znajduje się w punkcie $(0, 0)$.





Jakie będzie miała równanie ta parabola, gdy przesuniemy ją o wektor $[p, q]$?



Wprowadzamy primowany układ współrzędnych. Jakie równanie będzie miała przesunięta parabola w nowym układzie? Oczywiście analogiczne, czyli

$$y' = a(x')^2.$$

Korzystając z przeliczenia współrzędnych (6.1) otrzymamy

$$y - q = a(x - p)^2$$

$$\boxed{y = a(x - p)^2 + q}$$

Uwaga. Wierzchołek $(0, 0)$ przechodzi na (p, q), czyli punkt (p, q) jest wierzchołkiem przesuniętej paraboli.

Uwaga. Wzór w ramce nazywamy postacią kanoniczną trójmianu kwadratowego.

Uwaga. Powtarzając to rozumowanie na ogólnych wzorach otrzymamy

dany wykres	przesunięcie	po przesunięciu
$y = f(x)$	$[p, q]$	$y - q = f(x - p)$ czyli $y = f(x - p) + q$
$F(x, y) = \mathrm{const}$	$[p, q]$	$F(x - p, y - q) = \mathrm{const}$
$x^2 + y^2 = r^2$	$[a, b]$	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$y = ax$	$[x_0, y_0]$	$y - y_0 = a(x - x_0)$

Przykład (P-1/7)**.** Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W(1, 4)$. Najmniejsza wartość funkcji w przedziale $\langle -2, 2\rangle$ wynosi -5.

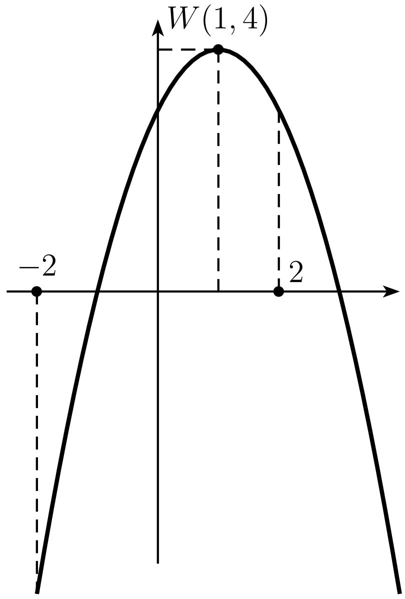
(a) Przedstaw wzór funkcji w postaci iloczynowej.

(b) Rozwiąż nierówność $f(x) < 0$.

Rozwiązanie. Od razu wiemy, że funkcja ma równanie $y = a(x-1)^2 + 4$. Ponieważ funkcja przyjmuje wartości mniejsze niż rzędna wierzchołka, więc na pewno „wąsy” są skierowane w dół i $a < 0$.

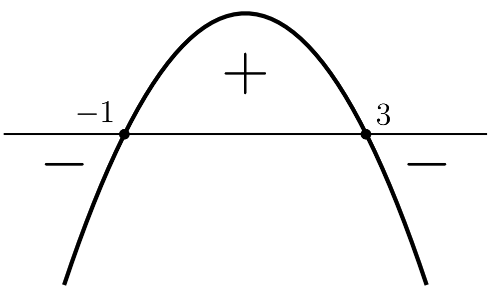
Teraz najważniejszy moment: musimy się domyślić, czy wartość najmniejsza przyjmowana jest dla $x = -2$, czy dla $x = 2$? Oczywiście dla $x = -2$, bo ten punkt jest bardziej oddalony od odciętej wierzchołka $x = 1$ (można też rozumować z wzoru). Mamy więc $f(-2) = -5$, czyli

$$a(-2-1)^2 + 4 = -5, \quad \text{skąd} \quad a = -1.$$



Do postaci iloczynowej możemy przejść korzystając z wzorów skróconego mnożenia:

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4 = -\left[(x-1)^2 - 2^2\right] = \\ -(x-1-2)(x-1+2) = -(x-3)(x+1).$$



Parabola ma „wąsy” skierowane w dół i przecina oś poziomą dla

$$x_1 = 3, x_2 = -1.$$

Dzięki tym informacjom łatwo rozwiązujemy nierówność $f(x) < 0$. Rozwiązaniem jest

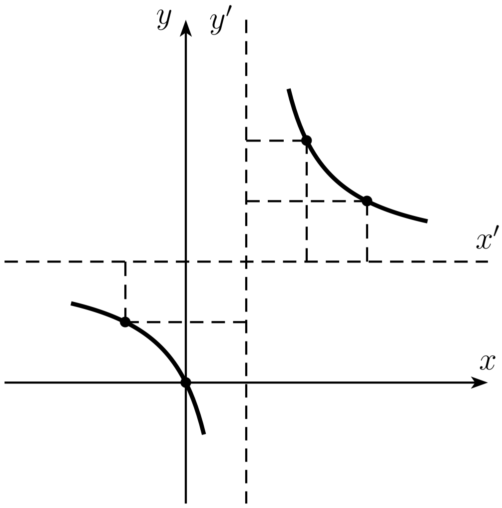
$$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

6.5 Jeszcze jeden przykład postaci kanonicznej

Nieskracalny ułamek zbudowany z funkcji liniowych, którego mianownik nie jest stałą

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

nazywamy funkcją homograficzną. Okazuje się, że każda taka funkcja jest przesunięciem wykresu postaci $y = \frac{A}{x}$.

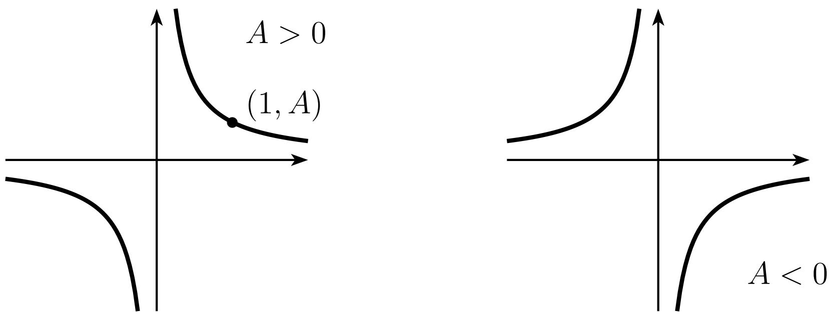


Przykład. Mamy

$$y = \frac{2x}{x-1} = \frac{2x-2+2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1},$$

czyli $y = \frac{2}{x}$ przesuwamy o wektor $[1, 2]$. Osie układu primowanego pokrywają się z tak zwanymi *asymptotami* wykresu.

Uwaga. Dla $A > 0$ funkcja $\frac{A}{x}$ jest malejąca w przedziałach określoności, zaś dla $A < 0$ rosnąca w tych przedziałach.



Zadanie (R-4/7)**.** Wzór funkcji $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ tworzymy w następujący sposób. Ze zbioru $Z = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ losujemy kolejno trzy liczby bez zwracania; pierwsza z wylosowanych liczb jest równa współczynnikowi a, druga – współczynnikowi b, trzecia – współczynnikowi c. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A: f jest funkcją malejącą w każdym ze zbiorów $(-\infty, 2)$ oraz $(2, +\infty)$,

B: miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0.

Rozwiązanie. Aby zaszło zdarzenie A musimy koniecznie wybrać dodatnie a w pierwszym losowaniu; w drugim losowaniu musimy wybrać koniecznie $b = 2$, zaś w trzecim losowaniu wynik jest dowolny. W pierwszym losowaniu mamy tylko dwie możliwości, bo nie możemy wybrać dwójki, którą musimy wybrać za drugim razem. Stosując regułę mnożenia otrzymujemy

$$P(A) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{15}.$$

Do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia B potrzebujemy tzw. reguły mnożenia z wariantami. Zauważmy najpierw, że ma być $f(0) = 0$, czyli $\frac{a}{-b} + c = 0$, skąd $a = bc$. Jeżeli zatem w pierwszym losowaniu wybierzemy jakąś liczbę „a”, to w dwóch dalszych losowaniach musimy wybrać liczby, których iloczyn jest równy „a”. Np. dla $a = 1$ taki wybór nie istnieje, zaś dla $a = 2$ mamy możliwości $(2, -1, -2)$ i $(2, -2, -1)$.

wariant pierwszego wyboru	liczba wyborów dla wariantu
$a \in \{1, -1\}$	–
$a \in \{2, -2\}$	$2 \cdot 2 \cdot 1$
$a \in \{3, -3\}$	$2 \cdot 2 \cdot 1$
razem	8

Ostatecznie $P(B) = \dfrac{8}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \dfrac{1}{15}$.

Wykład 7

O wielomianach algebraicznie i trochę geometrii

Mówiąc o algebraicznych aspektach wielomianów traktujemy je formalnie, jak napisy, czyli tzw. wyrażenia. Aspekt geometryczny wielomianów poruszamy w kolejnym wykładzie. Na samym końcu tak zwane „najmocniejsze” twierdzenie geometrii.

7.1 Wielomiany, jako wyrażenia

Wielomianem zmiennej x stopnia n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ nazywamy wyrażenie

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{7.1}$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbowymi współczynnikami, przy czym $a_n \neq 0$. Mówimy: wielomian o współczynnikach całkowitych, wymiernych, rzeczywistych,... stosownie do zbioru, z którego pochodzą współczynniki. Każdemu wielomianowi odpowiada funkcja wielomianowa, którą omówimy w kolejnym wykładzie.

Ćwiczenie. Gdzie jest wielomian?

A. $x^2 + \frac{1}{x}$ B. $x^2 + \sqrt{x}$ C. 1 D. 0

E. $\frac{1}{x^2+1}$ F. $0x^2 + x + \sqrt{2}$ G. $\frac{1}{2}x^{100} + 1$ H. x

Komentarz. A. NIE, bo wykładniki muszą być nieujemne, B. NIE, bo wykładniki muszą być całkowite, C. TAK, wielomian stopnia 0, D. TAK, wielomian zerowy (bez stopnia), E. NIE, zmienna nie może występować w mianowniku, F. TAK, wielomian stopnia 1, G. TAK, wielomian stopnia 100, H. TAK, wielomian stopnia 1.

Uwaga. Umawiamy się, że 0 jest wielomianem (chodzi o to, żeby różnica wielomianów zawsze była wielomianem, np. $x - x = 0$). Definicja (7.1) obejmuje wyłącznie wielomiany niezerowe. Wielomianowi zerowemu nie możemy przypisać stopnia. Mamy łatwą do sprawdzenia własność dla wielomianów ze stopniem: $\operatorname{stop} W(x)U(x) = \operatorname{stop} W(x) + \operatorname{stop} U(x)$. Gdyby liczba z była stopniem wielomianu zerowego, to otrzymalibyśmy

$$z = \operatorname{stop} 0 = \operatorname{stop} 0x = \operatorname{stop} 0 + \operatorname{stop} x = z + 1 \quad \text{sprzeczność!}$$

Przykład. Wyrażenie $W(x) = ax+b$ znamy jako tzw. funkcję liniową. Dla $a \neq 0$ funkcja liniowa jest wielomianem stopnia 1; dla $a = 0,\ b \neq 0$ funkcja liniowa jest wielomianem stopnia zero; zaś dla $a = b = 0$ funkcja liniowa jest wielomianem zerowym.

Uwaga. Równanie $ax + b = 0$ nazywamy równaniem pierwszego stopnia. Dla $a \neq 0$ otrzymujemy jednoznaczne rozwiązanie $x = -\frac{b}{a}$ (jest to pierwiastek wielomianu pierwszego stopnia $W(x) = ax + b$); dla $a = 0,\ b \neq 0$ równanie nie ma rozwiązań, zaś dla $a = b = 0$ każda liczba jest rozwiązaniem równania.

Zadanie (R-2/9)**.** Dane jest równanie z parametrem a:

$$ax - a^2 = \sqrt{3}x - 2a\sqrt{3} + 3$$

Dla jakiej wartości parametru równanie ma jedno rozwiązanie? Wyznacz to rozwiązanie i przedstaw je w najprostszej postaci.

Rozwiązanie. Mamy do czynienia z równaniem pierwszego stopnia. Przenosimy jednomiany zawierające „x” na lewą stronę.

$$(a - \sqrt{3})x = a^2 - 2a\sqrt{3} + 3$$

Po prawej stronie dostrzegamy kwadrat różnicy $(a - \sqrt{3})^2$, więc

$$(a - \sqrt{3})x = (a - \sqrt{3})^2 .$$

Dla $a = \sqrt{3}$ równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, zaś dla $a \neq \sqrt{3}$ równanie ma jednoznaczne rozwiązanie

$$x = \frac{(a - \sqrt{3})^2}{a - \sqrt{3}} = a - \sqrt{3} .$$

7.2 Równania wielomianowe wyższych stopni

Jeżeli $W(x)$ jest wielomianem, to równanie $W(x) = 0$ nazywamy *równaniem wielomianowym.* Omówiliśmy już przypadki $\operatorname{stop} W(x) \leqslant 1$. Ogólny kierunek rozwiązywania równań wielomianowych, to poszukiwanie rozkładu wielomianu $W(x)$ na czynniki dodatnich stopni.

Jeżeli $W(x) = U(x)V(x)$, to równanie $W(x) = 0$ przybiera postać

$$U(x)V(x) = 0 ,$$

co zachodzi gdy $U(x) = 0$ lub $V(x) = 0$. Zatem wystarczy „połączyć” pierwiastki dwóch ostatnich równań. Zbiory pierwiastków sumujemy algebraicznie, to znaczy uwzględniamy krotności.

Przykład. Rozwiążmy równanie

$$(x^2-1)(x^2+2x+1)=0$$

Rozdzielając dostaniemy z pierwszego równania $x^2-1=0$, $(x-1)(x+1)=0$, czyli $x_1=1$, $x_2=-1$. Z drugiego równania $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2$, $x_3=-1$ pierwiastek podwójny. Więc ostatecznie $x_1=1$ pierwiastek pojedynczy, $x_2=-1$ pierwiastek potrójny.

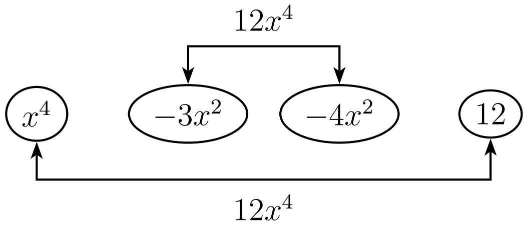
Zadanie (P-2/7)**.** Rozłóż wielomian $W(x)=x^4-7x^2+12$ na czynniki liniowe. Podaj nieujemne pierwiastki tego wielomianu.

Rozwiązanie. Stosując sztuczkę z rozbiciem środkowego jednomianu i z grupowaniem otrzymamy:

$$\begin{aligned} x^4-7x^2+12 &= x^4-3x^2-4x^2+12=x^2(x^2-3)-4(x^2-3) \\ &= (x^2-3)(x^2-4)=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Odp. Pierwiastkiem nieujemnym są 2 oraz $\sqrt{3}$.

Uwaga. Grupowanie czwórmianu (wielomianu składającego się z czterech jednomianów) jest wykonalne, jeśli iloczyn zewnętrznych jednomianów jest taki sam jak wewnętrznych



Metoda ta pozostaje skuteczna dla większej liczby zmiennych; np.

$$xy-x-y+1=x(y-1)-(y-1)=(y-1)(x-1)\,.$$

7.3 Trójmian kwadratowy i równanie stopnia drugiego

Trójmian kwadratowy ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ jest dokładnie wielomianem stopnia drugiego. Przeprowadzając „zwijanie" na ogólnych współczynnikach

$$\begin{aligned} y=ax^2+bx+c= \\ a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]= \\ a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\,, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$, otrzymujemy wspomnianą postać kanoniczną trójmianu

$$y = a(x-p)^2 + q \quad \text{dla} \quad p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Otrzymujemy w ten sposób wzory na współrzędne (p, q) wierzchołka paraboli. Podobnie otrzymamy tzw. *postać iloczynową* trójmianu. Jeżeli $\Delta \geqslant 0$, to możemy napisać $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$, zatem

$$ax^2 + bx + c =$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Pierwiastki trójmianu otrzymamy zerując czynniki: oznaczmy

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ostatecznie $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Dla $\Delta = 0$ otrzymujemy pierwiastek podwójny $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Wówczas postać iloczynowa ma formę $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Zadanie (P-3/2)**.** Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby (-6) oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3f(94)}{f(-24)}$

Rozwiązanie. Stosując postać iloczynową możemy zapisać $f(x) = a(x+6)(x-1)$. Stąd

$$\frac{3f(94)}{f(-24)} = \frac{3a \cdot 100 \cdot 93}{a \cdot (-18)(-25)} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{31}{6} = 62$$

Zadanie (P-1/3)**.** Miejscem zerowym wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 - 6x$ jest liczba (-1).

(a) Oblicz współczynnik a.

(b) Wyznacz pozostałe miejsca zerowe wielomianu

Rozwiązanie. Mamy $W(-1) = 0$, czyli $2(-1)^3 + a(-1)^2 - 6(-1) = 0$, skąd $-2+a+6 = 0$, więc $a = -4$. Pierwiastki wyznaczamy przez rozkład na czynniki: $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x = 2x(x^2 - 2x - 3)$. Dostrzegamy tutaj kolejny pierwiastek $x = 0$ pochodzący od czynnika x. Dalsze pierwiastki wyznaczamy z równania $x^2 - 2x - 3 = 0$. Mamy $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ (ten był podany)} \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ (nowy pierwiastek)} \end{aligned}$$

Odp. $a = -4$, pierwiastki to $0, -1, 3$.
Inny sposób polegałby na skorzystaniu z tw. Bézouta (później)

7.4 Dzielenie wielomianów z resztą, twierdzenie Bézouta

Wykonajmy klasyczne dzielenie z resztą dla liczb

$$\underset{\text{dzielna}}{\underset{\nearrow}{17}} : \underset{\text{dzielnik}}{\underset{\uparrow}{5}} = \underset{\text{iloraz}}{\underset{\nwarrow}{3}} \text{ r. } \underset{\text{reszta}}{\underset{\nwarrow}{2}}$$

Między tymi liczbami zachodzi związek $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Zauważmy, że przy dzieleniu przez 5 resztą jest jedna z liczb 0, 1, 2, 3, 4 czyli reszta jest zawsze mniejsza od dzielnika.

Teraz wykonajmy dzielenie wielomianów

$$\begin{array}{l}
(x^5 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - 1 \\
\underline{-x^5 + x^4 - x^3} \\
= \quad x^4 - x^3 + 2 \\
\quad \underline{-x^4 + x^3 - x^2} \\
\quad = \quad = \quad -x^2 + 2 \\
\qquad\qquad \underline{x^2 - x + 1} \\
\qquad\qquad = \quad -x + 3
\end{array}$$

Analogicznie jak dla liczb zachodzi związek

$$x^5 + 2 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) + (-x + 3)\,.$$

Ponadto reszta jest „mniejsza” od dzielnika w tym sensie, że albo jest zerem, albo jej stopień jest mniejszy od stopnia dzielnika.

Twierdzenie (Bézouta)**.** ([1]) Jeżeli p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian ten dzieli się bez reszty przez $(x - p)$.

Dowód. Dzielimy wielomian $W(x)$ przez $(x - p)$ z resztą. Mamy

$$W(x) = (x - p)I(x) + R(x)\,.$$

Reszta jest zerem lub jej stopień jest zerem (mniejszy od $\mathrm{stop}(x - p) = 1$), zatem reszta jest stałą. Mamy

$$W(x) = (x - p)I(x) + c$$

Wiedząc, że $W(p) = 0$ otrzymujemy

$$0 = W(p) = \underbrace{(p - p)}_{0} I(p) + c = c\,,$$

więc $c = 0$. Pokazaliśmy $W(x) = (x - p)I(x)$.

([1]) Étienne Bézout (1730–1783), matematyk francuski

Uwaga. Powtarzając rozumowanie bez założenia, że p jest pierwiastkiem otrzymamy

$$W(x) = (x - p)I(x) + W(p)\,,$$

czyli reszta z dzielenia przez $(x - p)$ jest równa $W(p)$.

Przykład (z wcześniejszego zadania P-1/3)**.** Wiedząc, że $x = -1$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 - 2x - 3$, drugi pierwiastek możemy wyznaczyć przez dzielenie przez $x - (-1) = x + 1$:

$$\begin{array}{l} (x^2 - 2x - 3) : (x + 1) = x - 3 \\ \underline{-x^2 - x \qquad\quad} \\ \quad\;\; -3x - 3 \\ \quad\;\; \underline{\;\;\; 3x + 3} \\ \quad\qquad = \;\; = \end{array}$$

skąd $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Pierwiastek $x = 3$ odczytujemy jako zero czynnika.

Zadanie (R-7/2)**.** Liczba 2 jest miejscem zerowym wielomianu $W(x)$. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^2 - 3x + 2$ jeśli wiadomo, że w wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 1)$ otrzymujemy resztę 5.

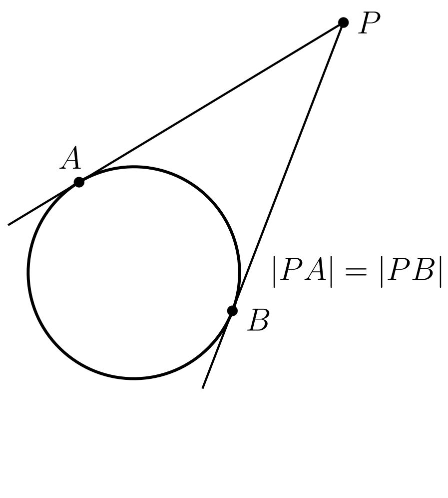
Rozwiązanie. Stosując dzielenie z resztą możemy zapisać

$$W(x) = (x^2 - 3x + 2)I(x) + ax + b \tag{7.2}$$

/bo stopień reszty jest mniejszy od stopnia dzielnika/. Istotny dla zadania jest fakt, że $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Wstawiając do (7.2) $x = 2$ otrzymamy $2a + b = 0$. Z wniosku po twierdzeniu Bézouta wiemy, że $W(1) = 5$, czyli $a + b = 5$. Odejmując mamy $a = -5$; $b = 10$, zatem szukana reszta wynosi $R(x) = -5x + 10$.

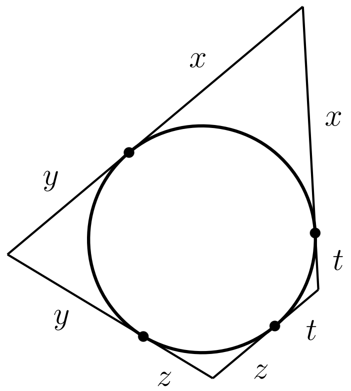
7.5 „Najmocniejsze twierdzenie geometrii"

Jeżeli okrąg jest wpisany w kąt, to punkty styczności odcinają na ramionach równe odcinki.



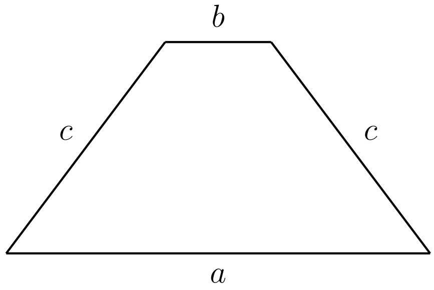
*

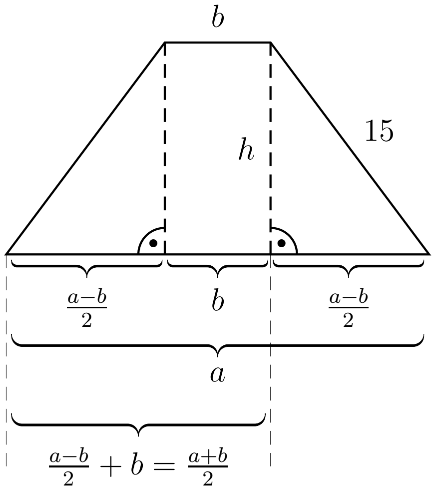
Tę nieco humorystyczną nazwę zaproponował działacz Olimpiady Matematycznej Jerzy Bednarczuk (Szkoła Geometrii, Odczyty Kaliskie, WSiP, W-wa 1993).



Wniosek. Jeżeli w czworokąt można wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków są równe. Korzystając z „najmocniejszego” oznaczamy równe odcinki. W obu przypadkach sumy długości przeciwległych boków wynoszą $x + y + z + t$.

Zadanie (R-4/5)**.** W trapez równoramienny o obwodzie 60 wpisano okrąg. Przekątna trapezu ma długość 17. Oblicz pole trapezu.





Rozwiązanie. Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc $a + b = 2c$. Znając obwód otrzymujemy $a+b = 30$ i $c = 15$. Chcąc „dostać się” do przekątnej, dążymy do wyrażenia wysokości przez boki:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = 17^2$$

$$15^2 + h^2 = 17^2$$

$$h^2 = 289 - 225 = 64$$

$$h = 8$$

Stąd łatwo obliczamy pole

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = 15 \cdot 8 = 120\,.$$

Wielomiany (geometrycznie), drugi kryzys, bryły

Wykład zaczynamy od obiecanego geometrycznego aspektu wielomianu. Później wspomnimy nieco o drugim kryzysie w matematyce, aby uzasadnić historyczne pojawienie się zapisów logicznych oraz pojęcia zbioru. Logika pozwoli nam zaprezentować ciekawy efekt związany z rozwiązywaniem równań i układów za pomocą zapomnianej metody starożytnych. Mając już zbiory trzeba koniecznie powiedzieć coś o aksjomatycznych własnościach prawdopodobieństwa. I na koniec oczywiście trochę geometrii.

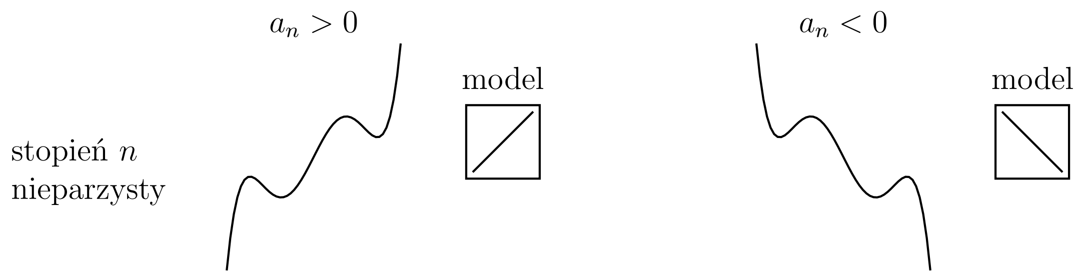
8.1 Funkcja wielomianowa

Wielomian $W(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$, traktowany ostatnio jako wyrażenie (napis), „przeciągamy" na teren geometrii biorąc pod uwagę funkcję wielomianową $y = W(x)$ oraz jej wykres. Przeanalizujemy dwa aspekty:

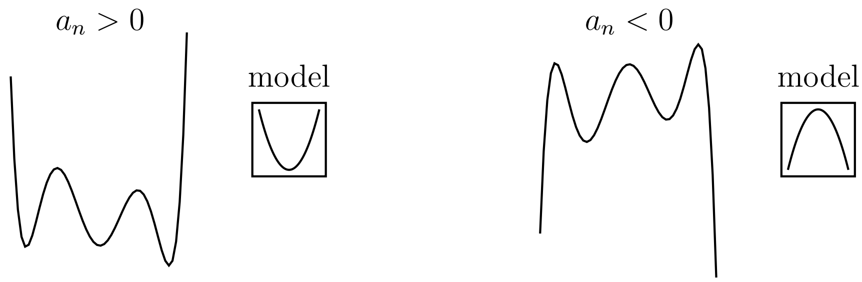
(I) zachowanie się wielomianu w nieskończoności

(II) zachowanie się wielomianu w pobliżu pierwiastków

Ad I. Dla dużych x wyraz wiodący $a_n x^n$ dominuje wszystkie pozostałe wyrazy i to on decyduje o zachowaniu się wielomianu w nieskończoności. Z prostej analizy znaków otrzymujemy cztery przypadki



stopień n parzysty

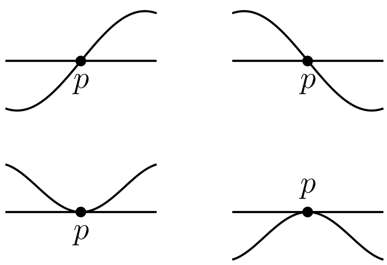


Dla wielomianu nieparzystego stopnia „modelem” jego zachowania się w nieskończoności jest funkcja liniowa, zaś dla wielomianu parzystego stopnia (dodatniego) ([1]) modelem jest parabola.

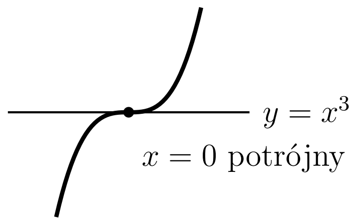
Ad II. Zachowanie się wielomianu w pobliżu pierwiastków można również wydedukować z prostej analizy znaku. Wynika z niej, że wielomian zmienia znak dla pierwiastka pojedynczego (nieparzystokrotnego) oraz nie zmienia znaku dla pierwiastka podwójnego (parzystokrotnego):

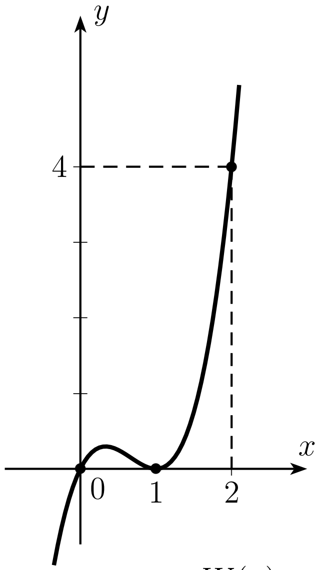
$W(x) = \dots (x - p) \dots$

$W(x) = \dots (x - p)^2 \dots$



Uwaga. Jeżeli krotność pierwiastka jest nieparzysta i większa od 1, następuje zmiana znaku ze „stycznością”, np.





Przykład (R-1/8)**.** Na rysunku przedstawiony jest wykres pewnego wielomianu W stopnia trzeciego.

(a) Czy wielomian W jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - x$? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Napisz wzór wielomianu W i wyznacz jego współczynniki.

Rozwiązanie. Z rysunku odczytujemy, że wielomian W ma pierwiastek pojedynczy w zerze oraz pierwiastek podwójny dla $x = 1$. Zatem $W(x) = ax(x-1)^2$. Wynika stąd łatwo podzielność przez wielomian P:

$$\frac{W(x)}{P(x)} = \frac{ax(x-1)^2}{x(x-1)} = a(x-1) \quad \text{(dzielenie algebraiczne!!!)}$$

([1]) "dodatniego": żeby wykluczyć wielomian stopnia zero, który jest stałą

Wartość współczynnika a łatwo wyznaczymy odczytując z rysunku, że $W(2) = 4$, czyli $a \cdot 2(2-1)^2 = 4$, skąd $a = 2$. Zatem

$$W(x) = 2x(x-1)^2 = 2x(x^2 - 2x + 1) = 2x^3 - 4x^2 + 2x\,.$$

8.2 Drugi kryzys w matematyce

W nawiązaniu do kryzysu „niewymierności”, omówionego podczas drugiego wykładu, warto wiedzieć, że matematyka przeżyła drugi znacznie poważniejszy kryzys w XIX wieku. Jak pamiętamy kryzys „niewymierności” został przezwyciężony dzięki geometrii. Tymczasem w pierwszej połowie XIX w. Rosjanin Łobaczewski oraz Węgier Bolyai wykryli, że znana nam geometria euklidesowa nie jest jedyną możliwą geometrią. Udało im się skonstruować logicznie poprawną teorię geometryczną, w której nie był spełniony piąty postulat Euklidesa.

Konieczność pogłębienia geometrii można łatwo wyjaśnić na gruncie fizyki i astronomii. Jak sprawdzamy, czy linijka jest prosta? Patrzymy! Czyli porównujemy krawędź linijki z torem biegu światła. Ale przecież pole grawitacyjne zakrzywia bieg światła. Co więc ma być taką linijką w kosmosie? Nie dziwi nas zatem, że do opisu wszechświata jako całości potrzebna jest inna geometria. Należy podkreślić, że geometria euklidesowa w zupełności wystarcza w zagadnieniach inżynierskich, nawet do lotu na Księżyc[2].

Odkrycie, że geometria euklidesowa nie jest jedyną możliwą, wyzwoliło proces poszukiwań nowego fundamentu dla gmachu matematycznego. Obecnie za fundament matematyki uważa się logikę i teorię zbiorów (tzw. teorię mnogości). Nie jest to fundament doskonały; napotkano nowe, wcześniej nieznane trudności. Matematyka sformalizowała się i utrudniła. Proces ten „zszedł” do szkół. Zmniejszono nacisk na geometrię. Z punktu widzenia dydaktyki matematycznej, proces ten okazał się niekorzystny. Teraz dąży się do przywrócenia roli geometrii oraz zmniejszenia formalizmów.

8.3 Dwa zdania o logice i teorii zbiorów (trochę formalizmów nie zaszkodzi)

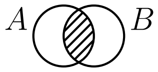
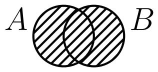
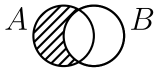
Zdania w logice oznaczamy literami p, q, r, ... i przypisujemy im wartość logiczną 1 (prawda) lub 0 (fałsz). Najprostsze spójniki logiczne to, koniunkcja (**i**, $\wedge$), alternatywa (**lub**, $\vee$), oraz negacja (**nie**, **nieprawda, że**, $\sim$):

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

p	$\sim p$
0	1
1	0

([2]) dr Jan Lachowski zwrócił mi uwagę, że poprawki w technologii GPS uwzględniają już nie tylko dylatację czasu w obiektach szybko poruszających się (szczególna teoria względności), ale także zagięcie przestrzeni i czasu w polu grawitacyjnym (ogólna teoria względności)

Istnieje analogia pomiędzy tymi spójnikami, a operacjami na zbiorach:

$p \wedge q$		$A \cap B$	iloczyn zbiorów	$(x \in A) \wedge (x \in B)$
$p \vee q$		$A \cup B$	suma zbiorów	$(x \in A) \vee (x \in B)$
$\sim p$		A'	dopełnienie zbioru	$\sim (x \in A), x \notin A$
$p \wedge (\sim q)$		$A - B$	różnica zbiorów	$(x \in A) \wedge (x \notin B)$

Najciekawszym spójnikiem logicznym jest implikacja (**jeżeli. . . , to. . .**) oznaczana strzałką $\Longrightarrow$. Następujące stwierdzenie uznamy bez wątpienia za prawdziwe

jeżeli	$\boxed{\text{n jest podzielne przez 4}}$	, to	$\boxed{\text{n jest parzyste}}$
$n = 1$	0		0
$n = 2$	0		1
$n = 4$	1		1

p	q	$p \Longrightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0

Wstawiając kolejno $n = 1$, $n = 2$ i $n = 4$ otrzymamy wszystkie przypadki, gdy implikacja jest prawdziwa. Implikacja jest fałszywa tylko w jednym przypadku: z prawdy nie wynika fałsz (interpretacja ewangeliczna: dobro nie przynosi złych owoców).

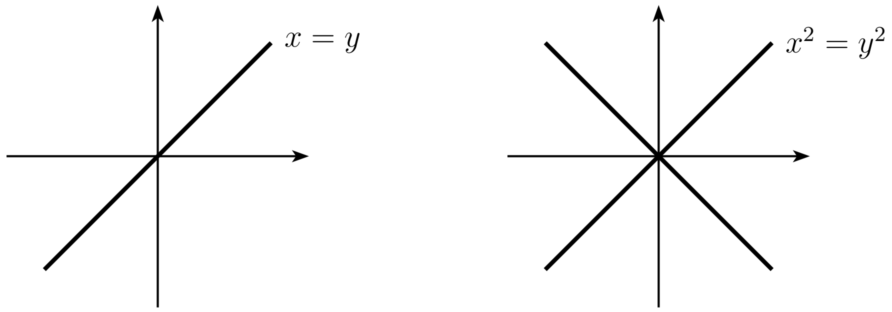
Za mnogościowy odpowiednik implikacji można uznać inkluzję (zawieranie). Powiemy, że zachodzi inkluzja $A \subset B$, jeżeli implikacja $x \in A \Longrightarrow x \in B$ jest prawdziwa. Wtedy odpowiednikiem równości zbiorów $A = B$ może być równoważność $p \iff q$ w rachunku zdań.

8.4 Rozwiązywanie równań i układów, metoda starożytnych

p	q	$p \iff q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Metoda starożytnych jest trochę zapomnianą alternatywą dla tzw. metody równań (układów) równoważnych. Każde równanie (układ) może być traktowane jako stwierdzenie logiczne zależne od parametrów. Zbiór rozwiązań jest określony przez te wartości parametrów, dla których stwierdzenie jest prawdziwe.

Mówiliśmy już o tym wcześniej, traktując to jako coś oczywistego. Na przykład stwierdzenie $x = y$ opisuje w powyższym sensie prostą w układzie współrzędnych. Jeżeli dwa stwierdzenia są połączone prawdziwą implikacją, np. $x = y \Longrightarrow x^2 = y^2$, to wówczas zachodzi inkluzja $Z_1 \subset Z_2$ zbiorów równań



W metodzie przekształceń równoważnych na każdym etapie dbamy o zachowanie równoważności $\Leftrightarrow$. Wówczas mamy pewność, że zbiór rozwiązań nie zmienia się $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \ldots$. W metodzie starożytnych zadowalamy się implikacją $\Longrightarrow$ (konsekwencją logiczną) i wówczas mamy gwarancję inkluzji $Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset \ldots$ w kolejnych etapach rozwiązywania równania (układu). W tej metodzie wymogiem koniecznym jest sprawdzenie!!! Bowiem podczas przekształceń mogą pojawić się dodatkowe „fałszywe" rozwiązania, które na końcu należy odrzucić.

Poniższe zadanie zaczerpnęliśmy z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Jeżeli ktoś nie zrobi sprawdzenia, nie ma szansy dostać punktu za to zadanie!

Przykład (II OMG, stop II, 13 I 2007)**.** Wyznacz wszystkie trójki $(a,\ b,\ c)$ liczb rzeczywistych spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases} \tag{8.1}$$

Rozwiązanie. Odejmując drugie równanie dwa razy od pierwszego (jak na to wpaść!!!) otrzymujemy konsekwencję logiczną

$$a^2 - 2a + b^2 - 4b + c^2 - 8c = -21 \tag{8.2}$$

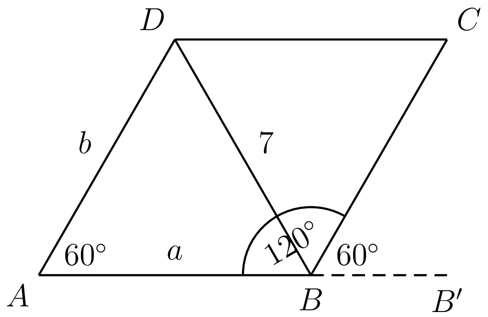
Stosując znane nam „zwijanie" otrzymamy

$$(a-1)^2 - 1 + (b-2)^2 - 4 + (c-4)^2 - 16 = -21 \text{ , czyli}$$
$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-4)^2 = 0$$

Równanie to jest spełnione wyłącznie przez trójkę $(a, b, c) = (1, 2, 4)$. Jak łatwo zauważyć, trójka ta nie spełnia wyjściowego układu równań. Zatem ten układ nie ma rozwiązań!

Co tu się stało? Oznaczmy przez Z_1 zbiór rozwiązań układu (8.1) oraz przez Z_2 zbiór rozwiązań równania (8.2). Mamy $Z_1 = \varnothing$ (zbiór pusty) oraz $Z_2 = \{(1,\ 2,\ 4)\}$. Zachodzi inkluzja $Z_1 \subset Z_2$. Zbiór powiększył się, gdy przeszliśmy od (8.1) do (8.2).

Zadanie (R-1/10)**.** W równoległoboku $ABCD$ przekątna DB ma długość 7. Wiedząc, że obwód równoległoboku wynosi 26, kąt ABC ma $120°$, oblicz długości boków równoległoboku.



Rozwiązanie. Kąt CBB' przyległy do kąta ABC ma 60°. zatem kąt DAB też ma 60° jako odpowiadający.
Oznaczmy $a = |AB|$, $b = |AD|$. Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABC mamy $|BD|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ$ $(\cos 60^\circ = \frac{1}{2})$, skąd $a^2+b^2-ab = 49$. Ponadto z danego obwodu mamy $a + b = 13$.

Zastosujmy metodę starożytnych do układu równań.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 49 \\ a + b = 13 \end{cases} \tag{8.3}$$

Podnieśmy drugie równanie do kwadratu:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 49 \\ a^2 + b^2 + 2ab = 169 \end{cases}$$

Odejmując od drugiego pierwsze mamy $3ab = 120$, więc $ab = 40$. Otrzymaliśmy nietrudny układ

$$\begin{cases} a + b = 13 \\ ab = 40 \end{cases},$$

który można rozwiązać na wiele sposobów. Wyliczając na przykład $b = 13 - a$ i wstawiając do drugiego równania otrzymamy $a(13 - a) = 40$, skąd $-a^2 + 13a - 40 = 0$. Pomnóżmy dla wygody przez (-1): $a^2 - 13a + 40 = 0$. Z „delty” mamy $a = 5$ lub $a = 8$, czyli dostajemy dwa symetryczne rozwiązania

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Koniecznie sprawdzamy, że wyjściowy układ (8.3) jest spełniony!!! ([3])

Odp. Boki mają długość 5 i 8.

8.5 Zastosowanie teorii zbiorów w rachunku prawdopodobieństwa

Język teorii zbiorów wykorzystywany jest do opisu zjawisk losowych. Eksperymentem losowym jest doświadczenie, które może przebiegać na wiele sposobów i nie da się z

([3]) Podczas rozwiązywania stosowaliśmy metodę starożytnych (badaliśmy konsekwencje logiczne). Nie mamy pewności, czy zbiór rozwiązań nie powiększył się.

góry przewidzieć wyniku doświadczenia. Np. rzut monetą lub kostką. Zbiór wszystkich sposobów przeprowadzenia eksperymentu oznaczamy Ω. Dla rzutu monetą $\Omega = \{O, R\}$, zaś dla rzutu kostką $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podzbiory zbioru Ω nazywamy zdarzeniami i oznaczamy zwykle A, B, C, $\ldots$. Weźmy zdarzenie A: „wypadła parzysta liczba oczek". Oczywiście $A = \{2, 4, 6\}$. Każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ przyporządkowujemy jego prawdopodobieństwo $P(A)$ /liczba!!!/. Żądamy, aby spełnione były własności

$\boxed{1}$ $P(A) \geqslant 0$,

$\boxed{2}$ $P(\Omega) = 1$,

$\boxed{3}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla A, B rozłącznych $(A \cap B = \varnothing)$.

Własności te nazywamy aksjomatami teorii prawdopodobieństwa. Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym, to przypisując każdemu jednoelementowemu zdarzeniu to samo prawdopodobieństwo, otrzymujemy tzw. prawdopodobieństwo klasyczne

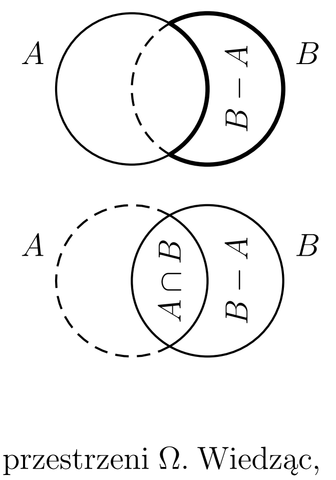
$$P(A) = \frac{\text{liczba elementów } A}{\text{liczba elementów } \Omega}$$

Sposób ten stosowaliśmy we wszystkich dotychczasowych zadaniach dotyczących prawdopodobieństwa. Nie jest to jedyny sposób określania prawdopodobieństwa. Możemy sobie wyobrazić, że zdarzeniom jednoelementowym mogą odpowiadać różne prawdopodobieństwa. Np. można zrobić taką monetę, która znacznie częściej wskazuje orła. Takie przypadki obejmuje podana definicja aksjomatyczna.

Przykład (fałszywa moneta)**.** Zdarzeniami w $\Omega = \{O,\ R\}$ dla rzutu monetą są: $\varnothing$,Ω,$\{O\}$, $\{R\}$. Przyporządkowując $P(\varnothing) = O,\ P(\Omega) = 1,\ P(\{O\}) = \frac{2}{3},\ P(\{R\}) = \frac{1}{3}$ otrzymamy prawdopodobieństwo spełniające aksjomaty.

Zadanie (R-9/6)**.** Wykaż, że jeśli A, B są dowolnymi zdarzeniami w przestrzeni Ω, to

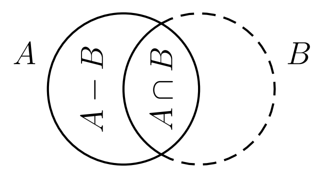
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



Rozwiązanie. Korzystamy z aksjomatu $\boxed{3}$. Mamy $A \cup B = A \cup (B - A)$ rozłączne, więc $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$. Z drugiej strony mamy sumę rozłączną $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ czyli $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$. Wyliczając $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ i wstawiając otrzymamy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Przykład (P-5/11)**.** Niech A, B będą zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω. Wiedząc, że $P(A) = 0{,}42$; $P(B') = 0{,}8$; $P(A \cup B) = 0{,}5$ oblicz $P(A \cap B)$ i $P(A - B)$.



Rozwiązanie. Mamy $B \cup B' = \Omega$, suma rozłączna, więc $P(B) + P(B') = P(\Omega) = 1$ oraz $P(B) = 1 - P(B') = 0,2$. Korzystając z wzoru

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

mamy $0{,}5 = 0{,}42 + 0{,}2 - P(A \cap B)$ skąd $P(A \cap B) = 0{,}12$.

Następnie korzystamy z sumy rozłącznej $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, otrzymamy $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$, czyli $0,42 = P(A - B) + 0,12$, więc $P(A - B) = 0,3$.

Przykład (P-4/5)**.** Spośród liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 1000 wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba ta podzielna jest przez 4 lub przez 5.

Rozwiązanie. Oznaczmy

A : „wylosowano liczbę podzielną przez 4”,

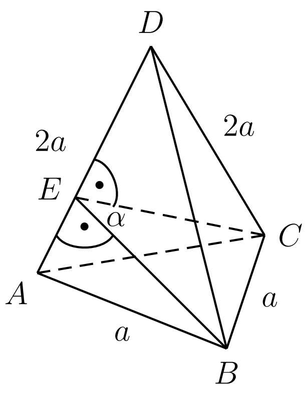
B : „wylosowano liczbę podzielną przez 5”.

Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cup B$. Mamy

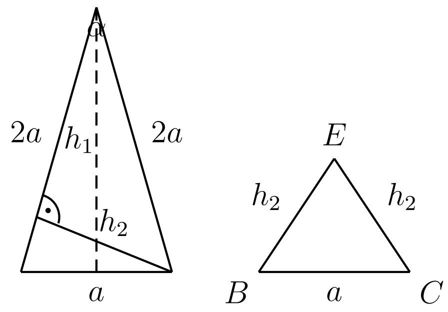
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{251}{1001} + \frac{201}{1001} - \frac{51}{1001} = \frac{401}{1001}.$$

8.6 Zadanie z brył (kąt dwuścienny)

Zadanie (R-4/8)**.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna jest dwa razy większa od krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta utworzonego przez dwie sąsiednie ściany boczne.



Rozwiązanie. Naszym zadaniem jest odliczenie kąta dwuściennego pomiędzy ścianami bocznymi. Już samo sformułowanie zadania sugeruje, żeby skorzystać z twierdzenia cosinusów. Z wierzchołków B i C podstawy prowadzimy odcinki prostopadłe to krawędzi AD spotykające się w punkcie E. Odcinki te są równe wysokości ściany bocznej poprowadzonej na ramię.



Stosujemy tutaj klasyczną sztuczkę wyznaczając najpierw wysokość poprowadzoną na podstawę

$$h_1 = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2},$$

a następnie korzystając z wzoru na pole trójkąta wyznaczamy wysokość opuszczoną na ramię

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}(2a)h_2,$$

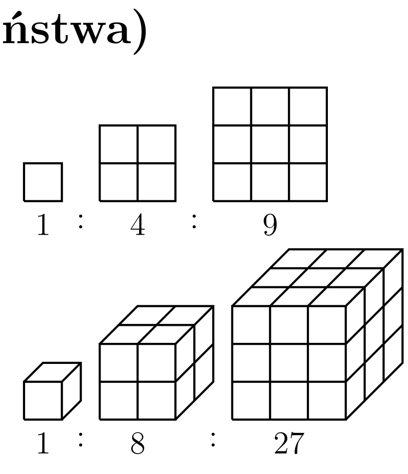
skąd $h_1 = 2h_2$, $h_2 = \dfrac{1}{2}h_1 = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$.

Stosując wzór cosinusów dla trójkąta BCE mamy

$$a^2 = h_2^2 + h_2^2 - 2h_2^2 \cos\alpha = 2h_2^2(1-\cos\alpha) = 2\cdot\frac{15a^2}{16}(1-\cos\alpha) = \frac{15a^2}{8}(1-\cos\alpha).$$

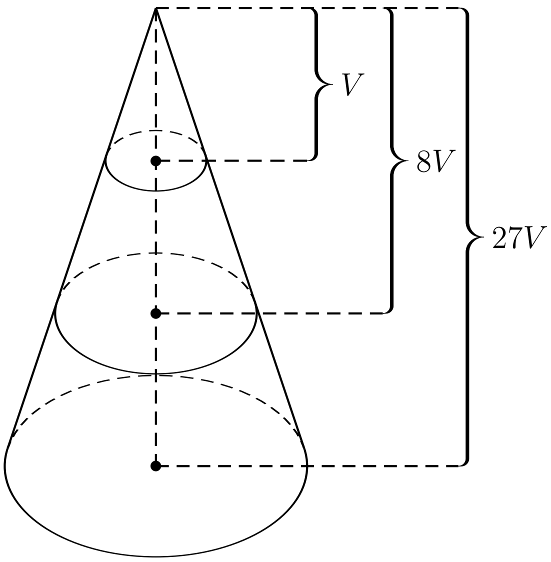
Zatem $1-\cos\alpha = \dfrac{18}{5}$, czyli $\cos\alpha = \dfrac{7}{15}$.

8.7 Zadanie z brył (skala podobieństwa)



Jeżeli na płaszczyźnie zwiększymy dwukrotnie (trzykrotnie) wymiary figury, to pole zwiększy się czterokrotnie (dziewięciokrotnie). Dla przestrzeni obserwujemy wtedy ośmiokrotny (dwudziestosiedmiokrotny) wzrost objętości.

Przykład (R-2/7)**.** Wysokość stożka podzielono na trzy równe odcinki i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny równoległe do podstawy. Oblicz stosunek objętości powstałych brył.



Rozwiązanie. Objętość najmniejszego stożka u góry oznaczymy przez V. Ze skali podobieństwa kolejne stożki będą miały $8V$ i $27V$. W różnicy otrzymamy $7V$ oraz $19V$.
Odp. $1 : 7 : 19$

Wykład **9**

Funkcje: potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna

Dzisiaj mówimy dużo o funkcjach i ich wykresach, czyli akcentujemy aspekt geometryczny (analityczny). Żeby wyrażenie $y = f(x)$ mogło być traktowane jako funkcja, należy wskazać z jakiego zbioru pochodzi x. Piszemy $y = f(x)\,,\ x \in D$. Zbiór D (czasami D_f) nazywamy dziedziną funkcji. Omawiamy funkcję wykładniczą i logarytmiczną. Na końcu wspominamy o wzorach Viète'a i ciągach.

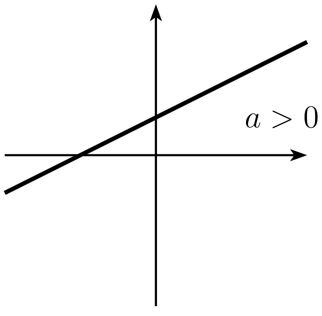
9.1 Monotoniczność funkcji

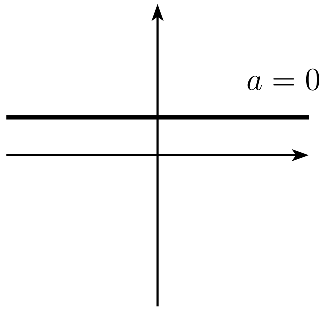
Mówimy, że funkcja $y = f(x)\,,\ x \in D$ jest rosnąca (silnie, ostro), jeżeli dla dowolnych x_1, x_2 zachodzi implikacja $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Analogicznie dla funkcji malejącej zachodzi implikacja

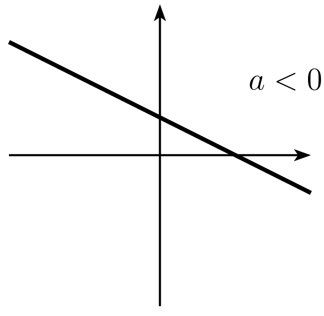
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\,.$$

Generalnie w zadaniach maturalnych pozwalamy sobie na wzrokowe odczytywanie monotoniczności funkcji, chyba że jesteśmy specjalnie proszeni o uzasadnienie.

Przykład (funkcja liniowa). $y = ax + b\,, x \in \mathbb{R}$







Dla przykładu zróbmy dowód w przypadku trzecim (metodą „łapania za tezę"). Mamy Z(założenie): $x_1 < x_2$ oraz T(tezę): $f(x_1) > f(x_2)$. Zaczynamy od tezy. Z założeń skorzystamy po drodze. Wystarczy, że pokażemy ujemność różnicy:

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) \ ,$$

korzystając z założenia $a < 0$ oraz $x_2 - x_1 > 0$. Iloczyn liczby ujemnej i dodatniej jest ujemny, więc wykazaliśmy $f(x_2) - f(x_1) < 0$, o co chodziło.

Uwaga. Funkcja $f(x) = -x$ jest malejąca, zatem zachodzi implikacja

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow -x_1 > -x_2 \, .$$

W istocie mamy tu równoważność. Jest to tzw. „zmiana kierunku nierówności".

9.2 Potęga o wykładniku całkowitym

Dla dowolnego a oraz dla $n = 1, 2, 3, \cdots$ definiujemy potęgę

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Zwróćmy uwagę na oczywiste własności potęgowania

$\boxed{1}$ $a^n a^m = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}}_{n+m} = a^{n+m}$

$\boxed{2}$ $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m} = a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m}} = a^{nm}$

$\boxed{3}$ $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n} = a^n b^n$

Wniosek. Spróbujmy roszerzyć pojęcie potęgi na wykładnik $n = 0$ z zachowaniem własności. Oznaczmy $x = a^0$. Mamy

$$a = a^1 = a^{1+0} \overset{\boxed{1}}{=} a^1 a^0 = ax \, , \text{ czyli } x = \frac{a}{a} = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

Zatem $\boxed{a^0 = 1 \, , a \neq 0}$. Zauważmy, że dopuszczenie do rozważań nowego wykładnika odbyło się kosztem ograniczenia możliwych wartości dla a.

Uwaga. Rozumowanie przeprowadzone wyżej można nazywać „forsowaniem" własności. Polega to na stosowaniu własności w zakresie, w którym nie były wprowadzone. W ten sposób tak jakby sama matematyka wskazuje nam możliwe kierunki rozwoju.

9.3 Potęga ujemna

Co to może być a^{-n}? $(n = 1, 2, 3, \dots)$
Oznaczmy $x = a^{-n}$ i załóżmy, że $a \neq 0$. Mamy

$$1 = a^0 = a^{n+(-n)} \overset{\boxed{1}}{=} a^n a^{-n} = a^n x \text{ skąd } \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ a \neq 0}$$

Wniosek. Z powyższego otrzymamy wzór na dzielenie potęg:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}, \quad a \neq 0.$$

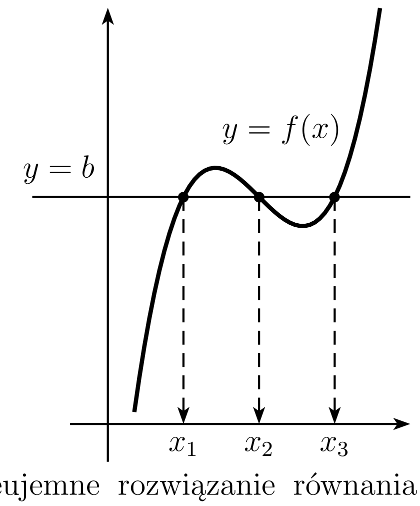
Przykład (P-5/4)**.** Rozwiąż nierówność liniową $81^{12}x + 27^{14} \cdot 11 > 27^{16} \cdot 2x + 2 \cdot 9^{21}$

Rozwiązanie. Korzystamy z własności:

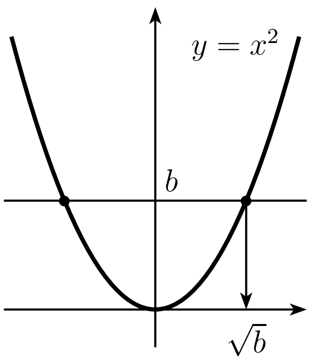
$$\begin{aligned}
\left(3^4\right)^{12} x - (3^3)^{16} \cdot 2x &> 2 \cdot (3^2)^{21} - (3^3)^{14} \cdot 11 \\
3^{48}x - 3^{48} \cdot 2x &> 2 \cdot 3^{42} - 11 \cdot 3^{42} \\
3^{48}(x - 2x) &> (2 - 11)3^{42} = -9 \cdot 3^{42} = -3^2 \cdot 3^{42} = -3^{44} \\
3^{48}(-x) &> -3^{44} \quad \text{(mnożymy przez „}-1\text{” ze zmianą kierunku nierówności)} \\
3^{48}x &< 3^{44} \\
x &< \frac{3^{44}}{3^{48}} = 3^{44-48} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}; \quad \textbf{odp. } x < \frac{1}{81};
\end{aligned}$$

9.4 Równanie $f(x) = b$, pierwiastek kwadratowy

Równanie to możemy rozwiązać graficznie przechodząc do układu $\begin{cases} y = f(x) \\ y = b \end{cases}$. Obserwujemy, gdzie prosta $y = b$ przecina wykres funkcji. Rozwiązaniem równania są rzuty punktów przecięcia na oś poziomą.

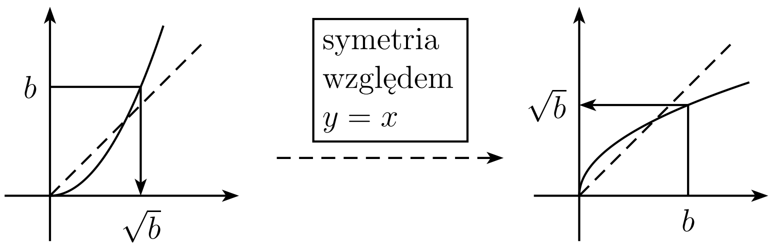


Przykład (zastosowanie do pierwiastka)**.** Patrząc na wykres funkcji $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ widzimy, że równanie $x^2 = b$ ma dwa rozwiązania dla $b > 0$, jedno rozwiązanie dla $b = 0$ i nie ma rozwiązań dla $b < 0$.



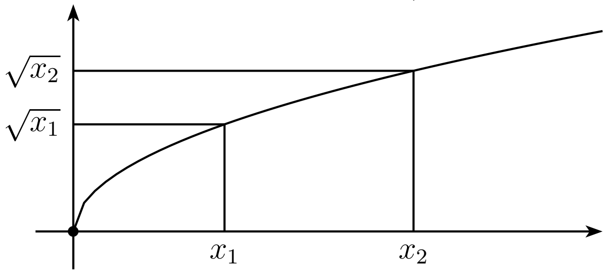
Definicja. Dla $b \geqslant 0$ nieujemne rozwiązanie równania $x^2 = b$ nazywamy pierwiastkiem kwadratowym liczby b i oznaczamy $\sqrt{b}$.

Jeżeli $b > 0$, to drugim rozwiązaniem jest $-\sqrt{b}$. Zauważmy, że nierówność $\sqrt{b} \geqslant 0$ jest skutkiem umowy. Bezpośrednio z tej definicji wynika, że $(\sqrt{b})^2 = b$.



Aby „zobaczyć” wykres pierwiastka, musimy umieścić b na osi poziomej. W tym celu zamieniamy rolami osie (symetria względem dwusiecznej pierwszej ćwiartki).

Zauważmy, że funkcja $y = \sqrt{x}\,,\ x \geqslant 0$ jest rosnąca



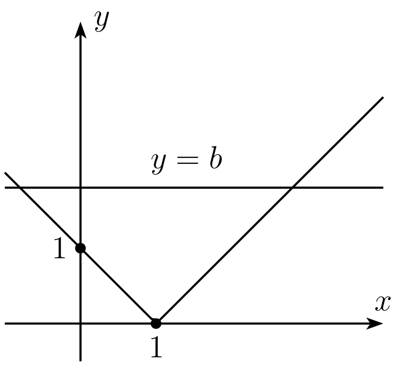
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \tag{9.1}$$

w istocie jest to równoważność

Zadanie (R-7/5)**.** Dla jakiej wartości parametru m, równanie

$$|x - 1| = m^2 - 2m + 1$$

ma dwa pierwiastki dodatnie.



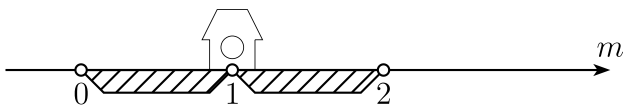
Rozwiązanie. Szkicując wykres funkcji $y = |x - 1|$, widzimy, że równanie $|x - 1| = b$ ma dokładnie dwa pierwiastki dodatnie, gdy

$$0 < b < 1$$

Zatem

$$0 < m^2 - 2m + 1 < 1 \tag{9.2}$$
$$0 < (m - 1)^2 < 1 \tag{9.3}$$
$$0 < |m - 1| < 1 \tag{9.4}$$

Metodą Zarzyckiego otrzymujemy
Odp. $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$.



9.5 Zbiór wartości funkcji

Dla funkcji $y = f(x)\,,\ x \in D$, symbolem $f(D)$ oznaczamy zbiór wartości funkcji. Można powiedzieć, że zbiór ten składa się z tych $y \in \mathbb{R}$, dla których istnieje rozwiązanie równania $f(x) = y$ dla $x \in D$. Geometrycznie: zbiór wartości jest rzutem wykresu funkcji na oś pionową.

Zadanie (R-3/8)**.** Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Wykaż, że zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie. Wystarczy pokazać, że równanie

$$\frac{x}{4-x^2} = m \qquad\qquad x \neq 2 \text{ i } x \neq -2$$

ma rozwiązanie dla dowolnego m. Mamy

$$x = m(4-x^2) \tag{9.5}$$

$$mx^2 + x - 4m = 0$$

Dla $m = 0$ rozwiązaniem jest $x = 0$. Dla $m \neq 0$ obliczmy deltę równania kwadratowego

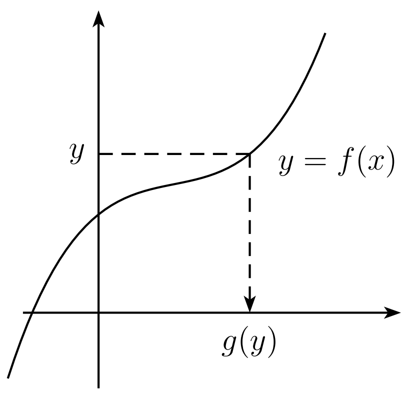
$$\Delta = 1 + 4m(4m) = 16m^2 + 1\,.$$

Widzimy, że $\Delta > 0$, więc równanie ma rozwiązania dla dowolnego m.

To, że rozwiązania muszą być różne od 2 i -2 ładnie widać z (9.5). Wstawiając te liczby do równania otrzymujemy sprzeczność $2 = m \cdot 0$ lub $-2 = m \cdot 0$ dla dowolnej wartości parametru m.

9.6 Funkcja różnowartościowa i funkcja odwrotna

Przypuśćmy, że funkcja $y = f(x)\,,\ x \in D$, ma taką własność, że dla dowolnego $y \in f(D)$ równanie $f(x) = y$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x \in D$.



Wówczas funkcję nazywamy różnowartościową. Dla funkcji różnowartościowej możliwa jest następująca konstrukcja: każdemu $y \in f(D)$ przyporządkowujemy jedyne rozwiązanie $x \in D$ równania $f(x) = y$. Takie przyporządkowanie nazywamy funkcją odwrotną do f. Oznaczmy ją literką g. ([1]) Mamy

$$f(g(y)) = y \quad \text{dla} \quad y \in f(D) \tag{9.6a}$$

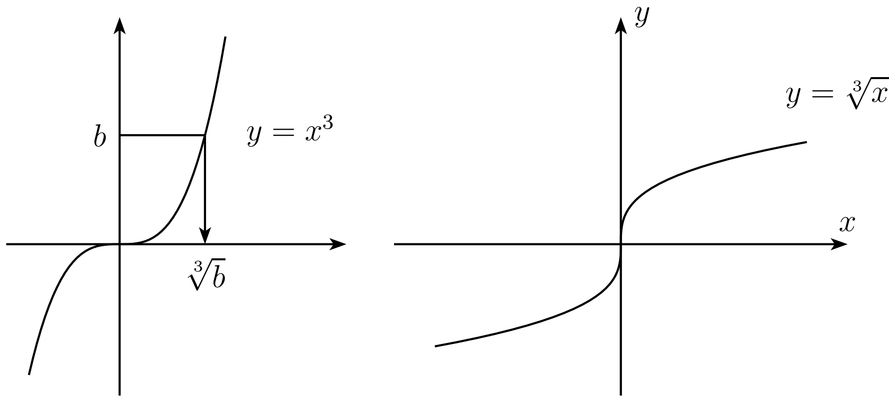
$$g(f(x)) = x \quad \text{dla} \quad x \in D \tag{9.6b}$$

() Istnieje standardowe oznaczenie funkcji odwrotnej, którego tutaj świadomie unikamy, aby uzyskać przejrzystość zapisu

Aby „zobaczyć” wykres funkcji odwrotnej, zmieniamy rolę osi i g zapisujemy jako funkcję od x.

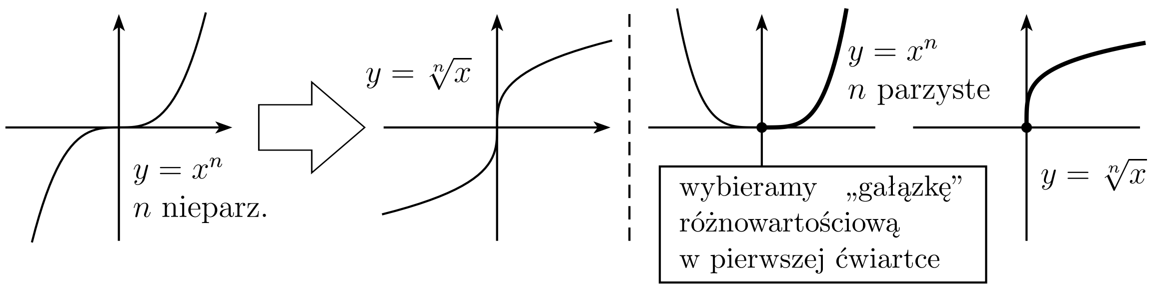
9.6.1 Konstrukcja funkcji $y = \sqrt[n]{x}$

Przykład. Funkcja $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ jest różnowartościowa (można udowodnić, że jest silnie rosnąca). Zbiorem jej wartości jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.



Funkcją odwrotną (zapisaną od x) jest $y = \sqrt[3]{x}$.

Uwaga. Powyższy schemat stosujemy do konstrukcji funkcji $y = \sqrt[n]{x}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dla n nieparzystego $y = \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do x^n, $x \in \mathbb{R}$, zaś dla n parzystego $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$, jest funkcją odwrotną to $y = x^n$, $x \geqslant 0$.



9.7 Funkcja wykładnicza

Spróbujmy zdefiniować potęgę $a^{\frac{1}{n}}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Oznaczmy $x = a^{\frac{1}{n}}$. „Forsując" własność $\boxed{2}$ mamy

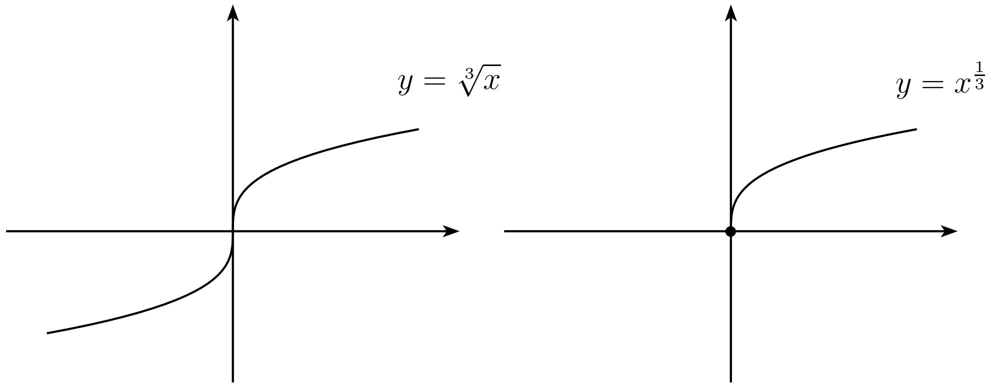
$$x^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a\,,$$

zatem kandydatem na $a^{\frac{1}{n}}$ jest pierwiastek równania $x^n = a$, czyli $\sqrt[n]{a}$.

Uwaga. Dla n nieparzystych założenie, że $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla $a \in \mathbb{R}$ prowadzi do sprzeczności. Popatrzmy:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2 \quad \text{(sprzeczność)}$$

Z tego powodu w definicji $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ograniczamy się do $a \geqslant 0$.



Wniosek. Ustalmy $a > 0$. Wówczas funkcję $y = a^x$ możemy zdefiniować dla dowolnego argumentu wymiernego kładąc

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad n,\, m = 1, 2, \ldots$$

Uwaga. Jeżeli x jest niewymierne, to możemy przeprowadzić następującą konstrukcję. Wyjaśnimy ją na przykładzie $x = \sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ Bierzemy ciąg liczb wymiernych, które dążą do $\sqrt{2}$, np.

$$1 \qquad 1{,}4 \qquad 1{,}41 \qquad 1{,}414 \qquad 1{,}4142 \qquad \text{itp.}$$

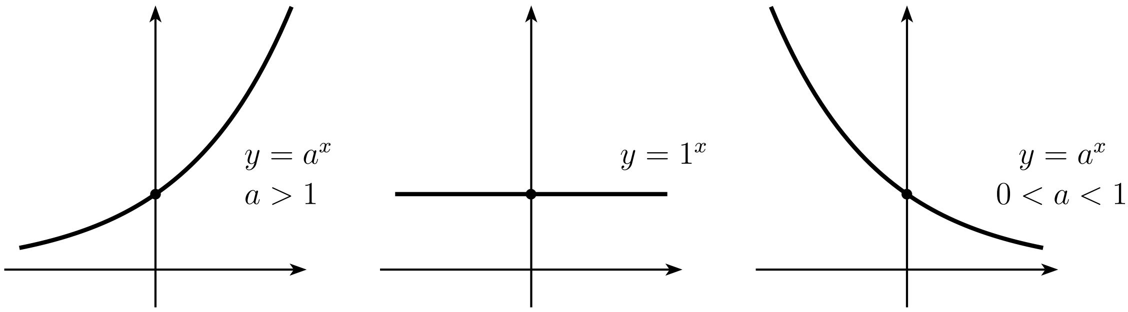
Jako $a^{\sqrt{2}}$ przyjmujemy granicę ciągu

$$a^1, \quad a^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{a^{14}}, \quad a^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{a^{141}}, \quad \text{itp.}$$

Tak zdefiniowana funkcja $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, posiada wcześniejsze własności $\boxed{1}$, $\boxed{2}$. Staranne dowody tych faktów są wielką matematyczną pracą, wymagającą także doprecyzowania pojęcia granicy. ([2])

([2]) Pojęcie granicy zadomowiło się na dobre w matematyce od czasu odkrycia rachunku różniczkowego i całkowego przez Newtona (1643-1727) i Leibniza (1646-1716), choć wcześniej frapowało już starożytnych Greków (np. paradoks Zenona z Elei). Bardzo wiele odkryć dokonano w matematyce bez precyzyjnego pojęcia granicy. Ścisłą definicję podaną w roku 1821 zawdzięczamy Cauchy'emu. Idąc za myślą A. Płoskiego, że nauczanie matematyki powinno w jakimś stopniu uwzględniać historyczny rozwój pojęć, można opierać się w nauczaniu na intuicyjnym pojęciu granicy tak długo, jak to możliwe. To znaczy do momentu, gdy ktoś poprosi o takie uściślenie lub wtedy, gdy chcemy dowodzić prawdziwości twierdzeń o granicach.

9.8 Monotoniczność funkcji wykładniczej



funckja rosnąca   funkcja stała   funkcja malejąca

Uwaga. Zauważmy, że funkcja wykładnicza przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Dla $a \neq 1$ mamy $f(D) = (0, +\infty)$

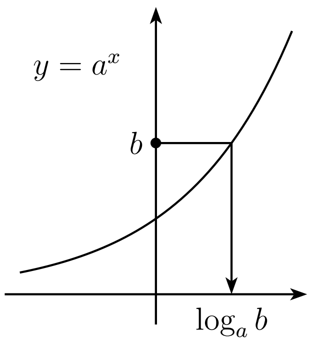
Zadanie (R-5/11)**.** Wiadomo, że liczba a jest rozwiązaniem równania $9^x + 9^{-x} = 14$. Nie obliczając a wyznacz wartość wyrażenia $3^a + 3^{-a}$.

Rozwiązanie. Wiadomo, że $9^a + 9^{-a} = 14$. Oznaczmy $t = 3^a + 3^{-a}$. Mamy

$$t^2 = (3^a + 3^{-a})^2 = 9^a + 2 + 9^{-a} = 16,$$

zatem $t = 4$ lub $t = -4$. Ponieważ funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie, więc $t = 3^a + 3^{-a} = 4$.

Uwaga. Jeżeli $a \neq 1$, to funkcja wykładnicza jest różnowartościowa; można zatem przeprowadzić konstrukcję funkcji odwrotnej. Otrzymujemy w ten sposób funkcję logarytmiczną. Przeanalizujemy etapy tej konstrukcji.



Przy założeniach $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$, równanie

$$a^x = b$$

ma jednoznaczne rozwiązanie. Rozwiązanie to oznaczamy $\log_a b$ i nazywamy logarytmem z liczby b przy podstawie a.

Przykład. Obliczmy $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = x$. Mamy

$$(\sqrt{2})^x = \frac{1}{8}, \quad 2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-3}, \quad \frac{1}{2}x = -3, \quad x = -6.$$

Uwaga. Skorzystaliśmy tu z przejścia $2^{x_1} = 2^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$. Jest to własność wszystkich funkcji różnowartościowych: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ i wynika z jednoznaczności rozwiązania równania $f(x_1) = f(x_2) = y$.

9.9 Własności logarytmów

Uwaga. Zauważmy, że $\log_a b$ jest liczbą, która po wstawieniu do okienka w $a^{\square} = b$ daje równość. Zatem (L_1) $a^{\log_a b} = b$; podobnie (L_2) $\log_a a^b = b$. Jest to szczególny przypadek własności (9.6a), (9.6b) funkcji odwrotnej (str. 72). Z własności tych wyprowadzamy własności logarytmów odwołując się do własności funkcji wykładniczej.

(1) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, (ogólne założenia $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$)

Uzasadnienie.

$$\log_a (xy) \overset{L_1}{=} \log_a \left[a^{\log_a x} a^{\log_a y}\right] \overset{\boxed{1}}{=} \log \left[a^{\log_a x + \log_a y}\right] \overset{L_2}{=} \log_a x + \log_a y$$

(2) $\log_a (x^p) = p \log x$ $(p \in \mathbb{R})$

Uzasadnienie.

$$\log_a (x^p) = \log_a \left[\left(a^{\log_a x}\right)^p\right] \overset{\boxed{2}}{=} \log_a \left(a^{p \log_a x}\right) \overset{L_2}{=} p \log_a x$$

(3) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ proszę sprawdzić

(4) Prawo skracania: $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$

Uzasadnienie. (znalezione przez studenta)

$$(\log_a b) \underbrace{(\log_b c)}_{p} \overset{2}{=} \log_a \left[b^{\log_b c}\right] \overset{L_1}{=} \log_a c$$

(5) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; jest to wniosek z poprzedniego, bo $(\log_a b)(\log_b a) = \log_a a = 1$.

(6) Zmiana podstawy logarytmów $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, bo $(\log_c a)(\log_a b) = \log_c b$.

Powyższa własność pozwala wyrażać logarytmy o różnych podstawach jedne przez drugie. Tradycyjnie wyróżnia się logarytm dziesiętny $\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$ oraz logarytm naturalny $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$, gdzie $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182\ldots$ jest liczbą Eulera.

Zadanie (R-3/2)**.** Wiadomo, że $\log_6 2 = a$. Wyznacz $\log_{24} 36$ w zależności od a.

Rozwiązanie.

$$\log_{24} 36 = \frac{\log 36}{\log 24} = \frac{2 \log 6}{\log 4 + \log 6} = \frac{2 \log 6}{2 \log 2 + \log 6} = \frac{2}{2\frac{\log 2}{\log 6} + 1} = \frac{2}{2a + 1}$$

9.10 Wzory Viète'a dla trójmianu

Jeżeli trójmian $ax^2 + bx + c$ ma pierwiastki x_1, x_2, to możemy napisać

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Jest to omówiona podczas wykładu 7 postać iloczynowa. Rozwijając prawą stronę

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2) + ax_1x_2\,,$$

i porównując współczynniki otrzymamy $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ oraz $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.
Odnotujmy jeszcze jedną własność logarytmów:

⑦ $\log_{(a^q)} x = \frac{1}{q}\log_a x$ bo

$$\log_{(a^q)} x = \frac{1}{\log_x a^q} = \frac{1}{q\log_x a} = \frac{1}{q}\log_a x$$

Zadanie (R-1/1)**.** Suma pierwiastków trójmianu $y = ax^2 + bx + c$ jest równa

$$(\log_{u^2} v)(\log_{v^2} u),\ \text{ gdzie } u, v \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$$

Uzasadnij, że odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem trójmianu jest równa $\dfrac{1}{8}$.

Rozwiązanie. Mamy z ⑦

$$(\log_{u^2} v)(\log_{v^2} u) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{(\log_u v)(\log_v u)}_{1} = \frac{1}{4}.$$

Zatem $\dfrac{1}{4} = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ skąd szukana odcięta wynosi $p = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{8}$.

Zadanie (R-2/6)**.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = \log_p a_n$, dla $p > 0$, $p \neq 1$, jest ciągiem arytmetycznym.

Rozwiązanie. Wiedząc, że ciąg a_n ma stały iloraz $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, wystarczy pokazać, że ciąg b_n ma stałą różnicę. Obliczmy

$$b_{n+1} - b_n = \log_p a_{n+1} - \log_p a_n = \log_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \log_p q\,.$$

Czyli $r = \log_p q$.

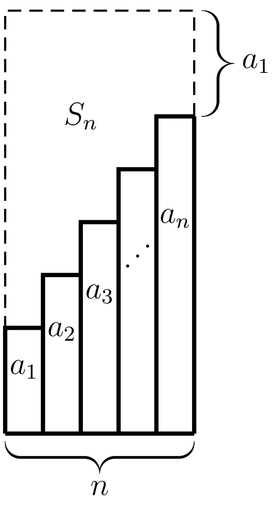
Uzupełnienia

Na dzisiejszym wykładzie będziemy starali się poruszyć jak najwięcej zagadnień, które nie były jeszcze prezentowane lub wymagają pogłębienia.

10.1 Ciąg arytmetyczny

Jest to ciąg o stałej różnicy $a_{n+1} - a_n = r$ ($a_{n+1} = a_n + r$). Wynika stąd łatwa formuła na n-ty wyraz:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\
&\dots \\
a_n &= a_1 + (n-1)r
\end{aligned}$$



Ważnym wzorem jest wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, który możemy wyprowadzić za pomocą „klocków” o jednostkowej szerokości. Mamy

$$2S_n = (a_1 + a_n)n, \text{ skąd } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Zadanie (P-5/1)**.** Ile liczb trzeba wstawić między 62 i 440, aby otrzymać ciąg arytmetyczny, którego suma jest równa 2008? Wyznacz różnicę ciągu.

Rozwiązanie. Mamy $a_1 = 62$, $a_n = 440$, zatem $S_n = \frac{62+440}{2} \cdot n = 2008$, skąd $251n = 2008$, $n = 8$. Czyli trzeba wstawić 6 liczb pomiędzy. Różnicę wyznaczymy ze wzoru na n-ty wyraz: $a_8 = a_1 + 7r$, więc

$$r = \frac{a_8 - a_1}{7} = \frac{440 - 62}{7} = 54\,.$$

10.2 Ciąg geometryczny

Przyjmuje się, dla ciągu geometrycznego, że każdy kolejny wyraz otrzymujemy z poprzedniego mnożąc go przez stałą liczbę q zwaną *ilorazem ciągu geometrycznego*. ([1]) Czyli $a_{n+1} = a_n q$. Dla ciągu geometrycznego o wyrazach niezerowych mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Wzór na n-ty wyraz otrzymujemy analogicznie, jak dla ciągu arytmetycznego:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2 \\ &\dots \\ a_n &= a_1 q^{n-1} \end{aligned}$$

Zadanie (R-5/2)**.** Iloczyn dziewięciu kolejnych początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego wynosi 512. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie. Napiszmy

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_1 q^2 \\ &\dots \\ a_9 &= a_1 q^8 \end{aligned} \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mnożąc stronami otrzymamy $a_1 a_2 \dots a_9 = a_1^9 q^{1+2+\cdots+8} = a_1^9 q^{36}$. Mamy $a_1^9 q^{36} = 512$, zatem $\left(a_1 q^4\right)^9 = 2^9$. Pamiętając, że pierwiastek nieparzystego stopnia jest jednoznaczny otrzymujemy $a_5 = a_1 q^4 = 2$.

*

Istnieje analogia pomiędzy ciągiem arytmetycznym i geometrycznym. To, co dla ciągu arytmetycznego związane jest z dodawaniem (odejmowaniem), dla ciągu geometrycznego odpowiada mnożeniu (dzieleniu). Analogia ta znalazła swój wyraz na poprzednim

([1]) Definicja ta odzwierciedla nową tendencję, obecną od pewnego czasu w podręcznikach szkolnych. Starsze źródła zakładają niezerowość q. Zgodnie z nową tendencją ciąg $1, 0, 0, \dots$ jest geometryczny ($a_1 = 1$, $q = 0$), a także ciąg $0, 0, 0, \dots$ ($a_1 = 0$, q dowolna stała).

wykładzie (str. 77, zad R-2/6), kiedy okazało się, że logarytmując dodatni ciąg geometryczny otrzymujemy ciąg arytmetyczny.

ciąg arytmetyczny	ciąg geometryczny
różnica $a_{n+1} - a_n = r$	iloraz $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$
suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	iloczyn $a_1 a_2 \ldots a_n$
—	suma

Uwaga. Pojęcie sumy ciągu geometrycznego jest poza tą analogią (nie ma odpowiednika)!

10.3 Suma ciągu geometrycznego

Pojęcie to nie jest przesadnie akcentowane w aktualnie publikowanych przykładowych zadaniach maturalnych. Jednak dla porządku przedstawiamy je pokrótce. Mamy

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Mnożąc stronami przez q dostajemy $q_n S_n = (a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}) + a_1 q^n$, skąd $qS_n = S_n - a_1 + a_1 q^n$. Traktując S_n jako niewiadomą obliczamy

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{10.1}$$

Wzór ten może być stosowany dla $q \neq 1$ (dla $q = 1$ mamy ciąg stały).

Uwaga. Sztuczkę z obustronnym mnożeniem (dzieleniem) przez q stosujemy od czasu gimnazjum. Na przykład niech $x = 0{,}2222\ldots$ Mnożąc obustronnie przez 10 otrzymamy $10x = 2{,}2222\ldots = 2 + x$, skąd $9x = 2$, $x = \dfrac{2}{9}$. W istocie obliczyliśmy tutaj sumę nieskończoną

$$x = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

Sumę nieskończoną za pomocą wzoru (10.1) możemy obliczyć, gdy $|q| < 1$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, skąd $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$. Stosując ten wzór dla liczby x otrzymamy

$$x = \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}.$$

Uwaga. Suma nieskończona (podobnie jak granica i pochodna) nie jest wymagana na maturze w roku 2009.

Zadanie (R-7/7)**.** Wiadomo, że ciąg $(a, b, 1)$ jest ciągiem arytmetycznym, zaś ciąg $(1, a, b)$ jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz a i b.

Uwaga. Jeśli trzy liczby x_1, x_2, x_3 tworzą ciąg arytmetyczny, to $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ skąd

$$2x_2 = x_1 + x_3, \; x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2},$$

czyli środkowa liczba jest średnią arytmetyczną skrajnych. Podobnie jeśli trzy liczby y_1, y_2, y_3 tworzą ciąg geometryczny, to

$$y_2^2 = y_1 y_3 \ , \tag{10.2}$$

czyli kwadrat środkowej jest równy iloczynowi skrajnych. Dla ciągu o wyrazach niezerowych wynika to z proporcji

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} \ ,$$

a gdy występują wyrazy zerowe, to mamy zero po obu stronach (10.2).

Rozwiązanie. Stosując uwagę mamy $b = \dfrac{a+1}{2}$ oraz $a^2 = b$, czyli $2a^2 - a - 1 = 0$, skąd $a = 1$ lub $a = -\dfrac{1}{2}$. Otrzymujemy dwa rozwiązania $a = b = 1$, lub $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{4}$.

10.4 O funkcjach trygonometrycznych argumentu rzeczywistego

Podczas wykładu 4 (str. 24) zdefiniowaliśmy funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym. Na początku wykładu 5 pokazaliśmy jak geometria podpowiada nam sposób uogólniania funkcji trygonometrycznych na kąty rozwarte. Wprowadziliśmy tam też wzór (str. 35)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{10.3}$$

Równie elementarnie, można wyprowadzić wzór

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{10.4}$$

Wzory te, chociaż wyprowadzone dla kątów ostrych, pozwalają zdefiniować funkcje trygonometryczne dla kątów dowolnych.

Przykład.

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ \cos 60^\circ + \cos 60^\circ \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos 60^\circ \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \sin 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 240^\circ = \sin 120^\circ \cos 120^\circ + \cos 120^\circ \sin 120^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos 120^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \sin 120^\circ = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

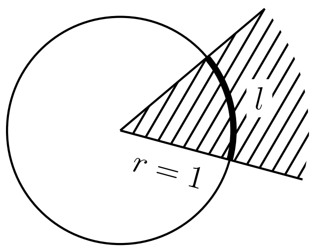
Mamy tutaj do czynienia ze zjawiskiem analogicznym, jak przy definiowaniu funkcji wykładniczej (wykład 9), kiedy własności same pokazywały nam jak rozwijać pojęcie potęgi. Tutaj obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych dla nowych kątów.

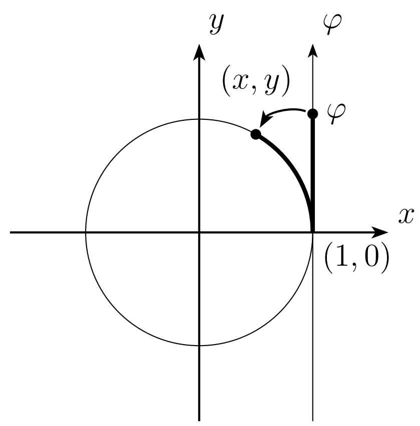
10.5 Miara łukowa kąta

Wygodny sposób mierzenia kąta polega na obserwacji długości łuku wycinanego przez kąt z okręgu o promieniu 1.

stopnie	miara łukowa
$360°$	2π
$180°$	π
$90°$	$\pi/2$
$60°$	$\pi/3$
$45°$	$\pi/4$
$30°$	$\pi/6$

„Jednolity” sposób definiowania funkcji trygonometrycznych kąta dowolnego można przedstawić z wykorzystaniem miary łukowej. W układzie współrzędnych umieszczamy okrąg jednostkowy o środku $(0,0)$. Do okręgu w punkcie $(1,0)$ jest styczna oś „φ” oznaczająca kąt (podziałka, jak na OY).





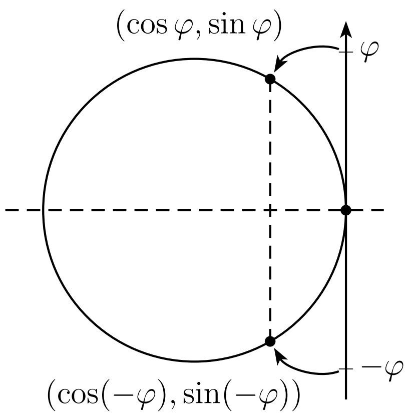
Ustalamy liczbę φ i „nawijamy” oś na okrąg do momentu, gdy liczba φ „dotknie” okręgu. Wówczas przyjmujemy

$$\cos\varphi \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad \sin\varphi \stackrel{\text{def}}{=} y.$$

Oczywiście

$$\operatorname{tg}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{ctg}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

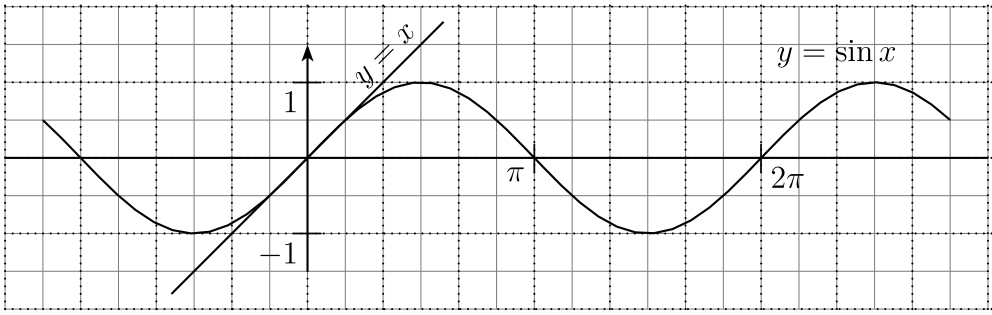
Uwaga. Różne sposoby uogólnienia funkcji trygonometrycznych prowadzą do tego samego rezultatu (harmonia rzeczywistości).



Przykład. Posługując się tą interpretacją dostrzegamy np. łatwo, że

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \quad \text{oraz} \quad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi.$$

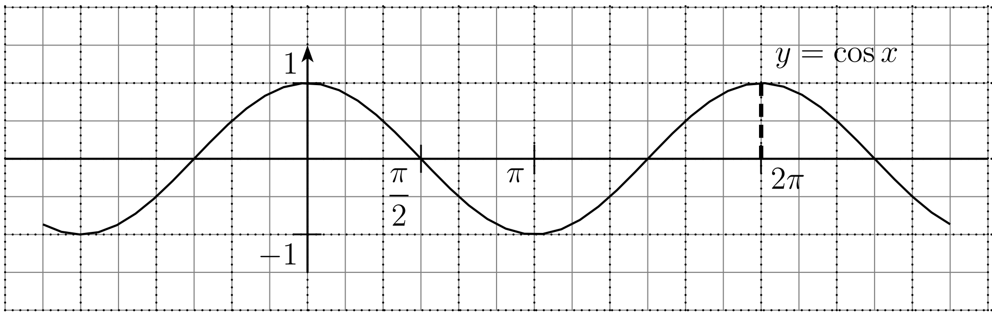
Kończąc ten temat, naszkicujemy wykresy $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$. Jeżeli szkic wykonujemy na papierze w kratkę, wygodnie jest stosować biblijne przybliżenie liczby $\pi \approx 3$ (Druga Księga Kronik 4,2).



Krzywą tę nazywamy sinusoidą. Przecina ona zawsze oś poziomą pod kątem 45°. W szczególności, przechodząc przez $(0, 0)$, sinusoida jest styczna do prostej $y = x$. Fakt ten, często wykorzystywany na fizyce, zapisujemy jako

$$\sin x \approx x \text{ dla małych } x\,.$$

Poniżej cosinusoida.



Zadanie. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 5 - 2\sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Mamy $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, skąd $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$. Mnożąc przez (-2) dostajemy $0 \geqslant -2\sin^2 x \geqslant -2$, więc dodając 5 widzimy, że

$$5 \geqslant 5 - 2\sin^2 x \geqslant 3.$$

Czyli zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 3, 5\rangle$.

Zadanie (R-2/8)**.** Rozwiąż równanie $\dfrac{x}{|x|} + \cos\dfrac{x - |x|}{2} = 0$

Rozwiązanie. Musimy założyć, że $x \neq 0$. Ponieważ $|x| = \begin{cases} x \text{ dla } x \geqslant 0 \\ x \text{ dla } x < 0 \end{cases}$, więc

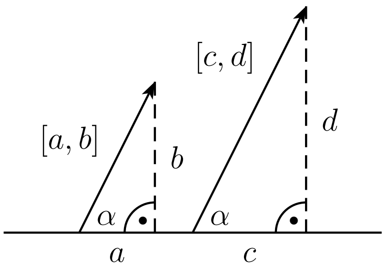
$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 \text{ dla } x > 0 \\ -1 \text{ dla } x < 0 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{x - |x|}{2} = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \geqslant 0 \\ x \text{ dla } x < 0 \end{cases}\,.$$

Zatem dla $x > 0$ otrzymujemy równanie sprzeczne $1 + \cos 0 = 0$, $2 = 0$. Dla $x < 0$ mamy $-1 + \cos x = 0$, czyli $\cos x = 1$. Z wykresu cosinusoidy odczytujemy nieskończony ciąg rozwiązań $x \in \{-2\pi, -4\pi, -6\pi, \dots\}$.

10.6 Uzupełnienie z geometrii analitycznej

Poniżej uzasadniamy kryterium równoległości i prostopadłości wektorów $[a, b]$ oraz $[c, d]$. Wyprowadzamy równanie ogólne prostej.

10.6.1 Kryterium równoległości

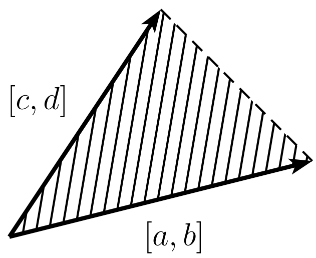


Wektory są równoległe jeśli tworzą ten sam kąt z poziomem. w przypadku, gdy a, b, c, d są dodatnie otrzymujemy

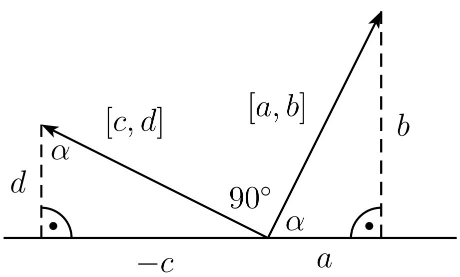
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad ad = bc, \quad \boxed{ad - bc = 0}$$

We wszystkich możliwych pozycjach wektorów otrzymujemy to samo kryterium.

Uwaga. Wyrażenie $ad - bc$ pojawia się (Dodatek A.5) we wzorze na pole trójkąta „rozpiętego” na wektorach $[a, b]$ i $[c, d]$. Mamy $S = \frac{1}{2}|ad - bc|$. Można powiedzieć, że wektory są równoległe dokładnie wtedy, gdy pole trójkąta zeruje się.



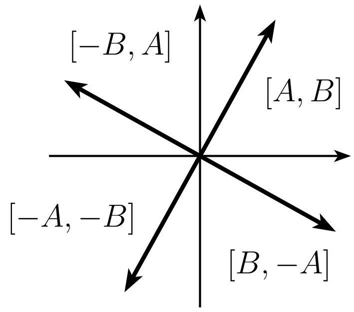
10.6.2 Kryterium prostopadłości



Odgadnijmy to kryterium w szczególnym przypadku przedstawionym na rysunku. Bierzemy prostopadłe wektory $[a, b]$ i $[c, d]$, przy czym a, b, d są dodatnie, zaś c ujemne. Z analizy kątów otrzymujemy $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{(-c)}{d}$, skąd $\boxed{ac + bd = 0}$

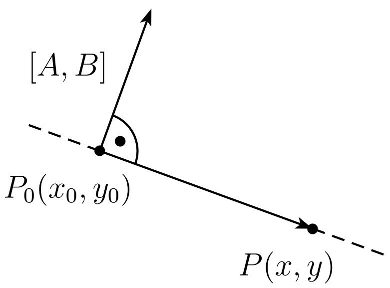
Okazuje się, że to kryterium pozostaje słuszne we wszystkich możliwych pozycjach wektorów.

Uwaga. Stosując powyższe kryterium łatwo sprawdzić, że kolejne wektory $[A, B]$, $[-B, A]$, $[-A, -B]$, $[B, -A]$ są do siebie prostopadłe.



10.6.3 Równanie ogólne prostej

Stosując kryterium prostopadłości możemy łatwo znaleźć równanie prostej prostopadłej do wektora $[A, B]$, przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0)$.



Zauważmy, że punkt $P(x, y)$ leży na prostej dokładnie wtedy, gdy wektory $[A, B]$ oraz $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0]$ są prostopadłe. Stosując kryterium otrzymujemy

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{10.5}$$

Jest to ważny wzór. Rozwijając

$$Ax + By + \underbrace{(-Ax_0 - By_0)}_{C} = 0$$

otrzymujemy tzw. ogólne równanie prostej

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.6}$$

które pojawiło się podczas wykładu 2 (str. 14).

Wniosek. Wektor [A,B] jest zawsze prostopadły do prostej o równaniu (10.6).

Przykład. Niech $y = \frac{1}{3}x + 7$ będzie prostą. Mnożąc przez 3 i przenosząc na jedną stronę otrzymamy $-x + 3y - 21 = 0$. Zatem wektor $[-1, 3]$ jest prostopadły do prostej.

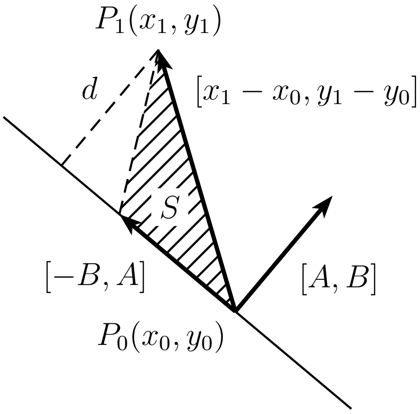
Przykład. Rozwiążmy innym sposobem zadanie P-3/8 (wykład 3, str. 20).

Zadanie (P-3/8)**.** Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, -3)$ i $B(10, 3)$.

Rozwiązanie. Szukamy prostej prostopadłej do wektora $\overrightarrow{AB} = [12, 6]$ przechodzącej przez środek odcinka S. Mamy $x_s = \frac{-2 + 10}{2} = 4$ i $y_s = \frac{-3 + 3}{2} = 0$; $S(4, 0)$ (Dodatek A.4). Z równania (10.5) mamy $12(x - 4) + 6(y - 0) = 0$ skąd $y = -2x + 8$.

10.6.4 Odległość punktu od prostej

Zaprezentowane pojęcia pozwalają stosunkowo łatwo wprowadzić wzór na odległość d punktu $P_1(x_1, y_1)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ zapisanej w postaci ogólnej.



Obieramy na prostej dowolny punkt $P_0(x_0, y_0)$ tak jak w (10.5). Obrócony o 90° wektor $[A, B]$ (wynik $[-B, A]$) zaczepiony w punkcie P_0 jest podstawą trójkąta, którego wysokość jest równa szukanej odległości. Długość podstawy wynosi $a = \sqrt{A^2 + B^2}$. Mamy $S = \frac{1}{2}ad$, więc

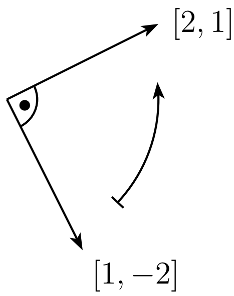
$$d = \frac{2S}{a} = \frac{2}{\sqrt{A^2+B^2}}\frac{1}{2}|A(x_1-x_0) + B(y_1-y_0)|,$$

skąd $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Zadanie (R-4/4)**.** Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

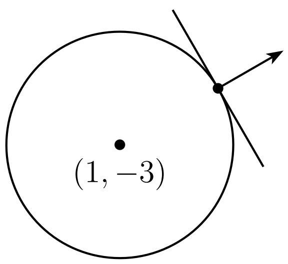
(a) Napisz równania stycznych do danego okręgu, prostopadłych do prostej o równaniu $x - 2y = 0$.

(b) Oblicz pole trójkąta ABS, gdzie A, B są punktami przecięcia się stycznych z prostą o równaniu $3x - y + 4 = 0$, zaś S jest środkiem okręgu.



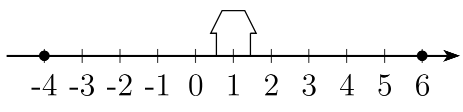
Rozwiązanie.

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 5 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \quad \text{środek} \quad (1,-3) \quad \text{promień} \quad r = \sqrt{5}\,.$$



Wektorem prostopadłym do prostej $x - 2y = 0$ jest $[1, -2]$. Obracając o 90° otrzymujemy $[2, 1]$. Prosta styczna jest prostopadła do wektora $[2, 1]$, czyli ma równanie $2x + y + m = 0$. Styczność uzyskamy wówczas, gdy odległość punktu $(1, -3)$ od stycznej będzie równa promieniowi. Zatem

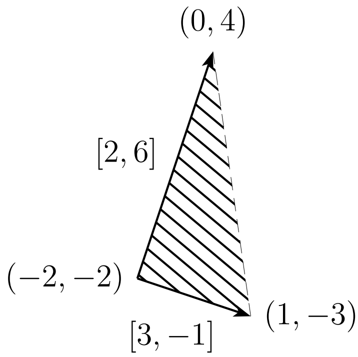
$$\frac{|2\cdot 1 + (-3) + m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$
$$|m-1| = 5,\ m = -4 \text{ lub } m = 6.$$



Otrzymujemy równania stycznych $2x + y - 4 = 0$ oraz $2x + y + 6 = 0$. Punkty A i B wyznaczymy rozwiązując układy równań

$$\begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 4 = 0 \\ 2x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$



Pole trójkąta $= \frac{1}{2}|3 \cdot 6 - (-1) \cdot 2| = 10\,\mathrm{cm}^2$.

10.7 Przykład trudniejszej nierówności z wartością bezwzględną

Zadanie (R-4/9)**.** Wyznacz algebraicznie zbiór tych wszystkich punktów osi liczbowej, których suma odległości od punktów -3 oraz -1 jest mniejsza od 5.

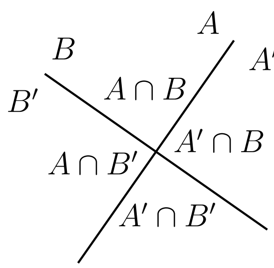
Rozwiązanie. Niech x oznacza współrzędną szukanego punktu. Stosując wzór na odległość punktów na osi liczbowej (str. 17, wykład 3) otrzymamy nierówność

$$|x + 3| + |x + 1| < 5.$$

Najbardziej klasyczny sposób rozwiązania takiej nierówności, to sprawdzenie przypadków. Przypadki te wynikają ze sposobu interpretacji wyrażeń

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3, & \text{gdy } x + 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3 \\ -(x + 3), & \text{gdy } x + 3 < 0 \iff x < -3 \end{cases}$$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{gdy } x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1 \\ -(x + 1), & \text{gdy } x + 1 < 0 \iff x < -1 \end{cases}$$



Oznaczmy $A = \langle -3, +\infty)$ oraz $B = \langle -1, +\infty)$. Mamy tutaj dwa podziały prostej $\mathbb{R} = A \cup A'$ oraz $\mathbb{R} = B \cup B'$, które „generują" podział „drobniejszy" na $A \cap B = \langle -1, +\infty)$, $A \cap B' = \langle -3, -1)$, $A' \cap B' = (-\infty, -3)$, $A \cap B' = \varnothing$. Efekt jest taki sam, jakbyśmy podzielili oś liczbową na trzy zbiory za pomocą liczb -3 oraz -1. Obszary te zazwyczaj numerujemy od lewej: ① $x < -3$, ② $-3 \leqslant x < -1$, ③ $x \geqslant -1$. Nierówność rozwiązujemy w każdym z obszarów pamiętając, że otrzymane rozwiązania przecinamy z obszarem, a następnie sumujemy rozwiązania z poszczególnych obszarów:

① $x < -3$

$$-(x + 3) + [-(x + 1)] < 5, \quad -2x < 9, \quad x > -4\frac{1}{2},$$

więc w obszarze $-4\frac{1}{2} < x < -3$,

② $-3 \leqslant x < -1$

$$x + 3 + [-(x+1)] < 5, \quad 2 < 5$$

prawda; wchodzi cały obszar $-3 \leqslant x < -1$,

③ $x \geqslant -1$

$$x + 3 + x + 1 < 5, \quad 2x < 1, \quad x < \frac{1}{2},$$

więc w obszarze $-1 \leqslant x < \frac{1}{2}$.

Sumując po obszarach otrzymujemy: **Odp.** $x \in \left(-4\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Dodatek **A**

Dowody i wyprowadzenia samodzielne

Ten dodatek to propozycja samodzielnego przeprowadzenia dowodów dwóch twierdzeń oraz wyprowadzenia trzech wzorów w formie samodzielnych ćwiczeń.

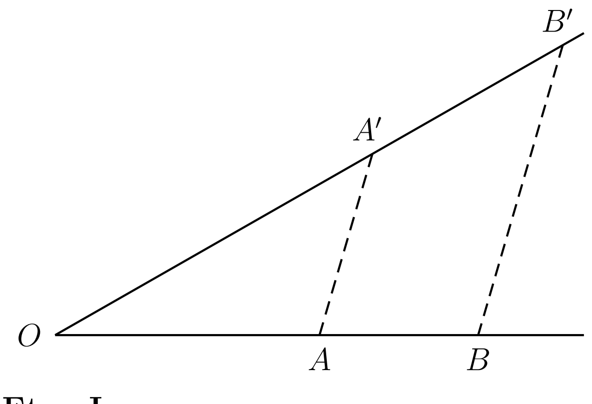
A.1 Dowód Twierdzenia Talesa

Poniżej przeprowadzasz dowód według podpowiedzi s. Inez Katarzyny Kasperczyk.
Zacznij od dwóch ćwiczeń przygotowawczych.

Zadanie (1)**.** Dane są dwa trójkąty o wspólnej podstawie takie, że prosta przechodząca przez ich wierzchołki jest równoległa do wspólnej podstawy. Udowodnij, że trójkąty te mają równe pola.

Zadanie (2)**.** Dane są dwa trójkąty o wspólnym wierzchołku, których podstawy są przylegającymi do siebie odcinkami leżącymi na jednej prostej nieprzechodzącej przez wspólny wierzchołek. Udowodnij, że proporcja długości podstaw trójkątów jest równa proporcji ich pól.

Chcesz udowodnić



Twierdzenie (Talesa)**.** Proste równoległe odcinają na dwóch przecinających się prostych proporcjonalne odcinki

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

Etap I
Korzystając z zadania (1) uzasadnij, że pola trójkątów ABA' i $AB'A'$ są równe.

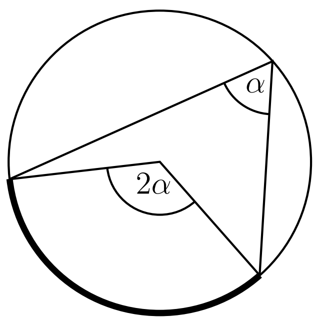
Etap II
Korzystając z zadania (II) uzasadnij proporcje

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{\text{pole } OAA'}{\text{pole } ABA'} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|A'B'|} = \frac{\text{pole } OAA'}{\text{pole } AB'A'} \ .$$

Etap III
Uzasadnij równość proporcji

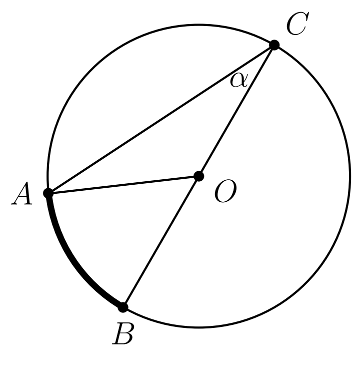
$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|} \ .$$

A.2 Twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym

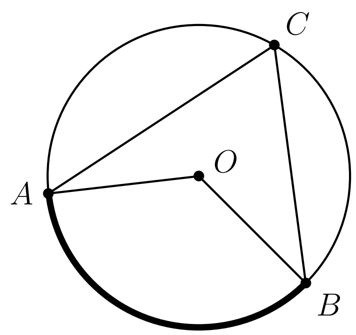


Orzeka ono, że kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Przeprowadź dowod twierdzenia w czterech etapach.

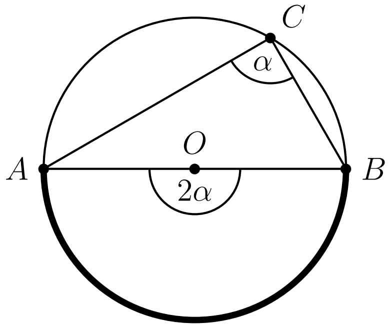


Etap I
Rozważ przypadek, gdy jedno z ramion kąta wpisanego jest średnicą okręgu. Traktując kąt ACB jako dany (oznacz go przez α), wyznacz kąt AOB korzystając z równoramienności trójkątów AOB i AOC.



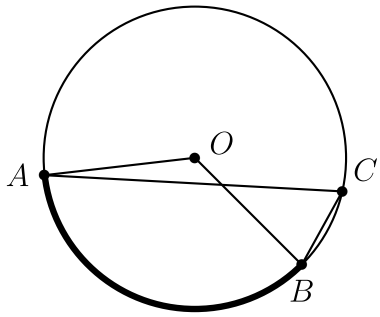
Etap II
Sprawdź przypadek, gdy środek okręgu leży we wnętrzu kąta wpisanego. Oznacz kąt ACB przez α. Chcesz wykazać, że kąt AOB jest dwa razy większy. Skorzystaj z wiedzy zdobytej w etapie I. W tym celu poprowadź prostą CO do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Oznacz kąt ACD przez α', zaś kąt DCB przez α''. Masz $\alpha = \alpha' + \alpha''$. Skorzystaj dwa razy z poprzednio rozważanego przypadku.

Etap III. Możesz teraz łatwo wykazać, że kąt oparty na średnicy jest prosty korzystając z etapu II.



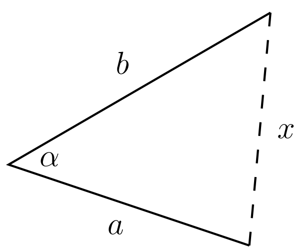
Zwróć uwagę, że środek okręgu leży we wnętrzu kąta wpisanego ACB. Wiedząc ile wynosi kąt AOB, wyznacz kąt ACB.

Etap IV
Załóż teraz, że środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego. Ten przypadek różni się istotnie od wcześniejszych.



Znowu chcesz pokazać, że kąt AOB jest dwa razy większy od kąta ACB. Możesz skorzystać z wniosków uzyskanych we wcześniejszych etapach. Oznacz kąt ACB przez α. Przedłuż prostą BO do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Środek okręgu leży we wnętrzu kąta ACD. Wyznaczaj kolejno kąty: BCD, ACD, AOD, AOB.

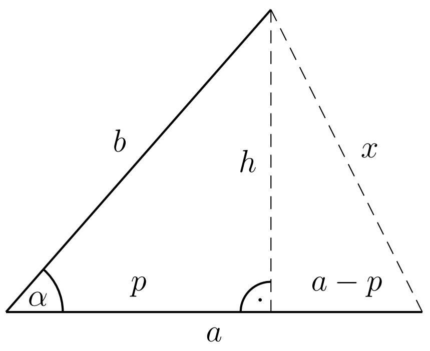
A.3 Wyprowadzenie wzoru cosinusów



Dane są dwa odcinki o długościach a i b tworzące kąt α. Chcemy obliczyć długość x odcinka leżącego naprzeciw kąta α.

Jeżeli α jest kątem prostym, to wiemy z twierdzenia Pitagorasa, że $x^2 = a^2+b^2$. Będziemy naśladować rozumowanie z punktu 5.1. Przystępując do wyprowadzenia wzoru cosinusów zakładamy, że umiemy określać cosinus tylko dla kąta ostrego.

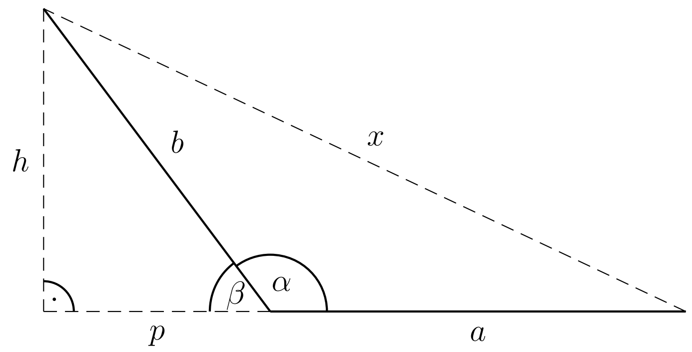
Etap I



Załóż, że α jest kątem ostrym. Traktując a, b, α jako znane, wylicz kolejno: h (skorzystaj z $\sin\alpha$), p (skorzystaj z $\cos\alpha$), oraz x^2 (skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa). Sprowadź wyrażenie do możliwie prostej postaci.

Etap II Zaproponuj wartość $\cos 90$.

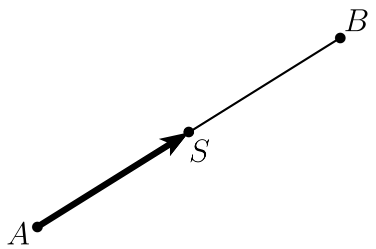
Etap III
Rozważ przypadek, gdy α jest kątem rozwartym ($90 < \alpha < 180$). Wtedy kąt $\beta = 180-\alpha$ jest ostry. Podobnie, jak w pierwszym etapie, wyznacz x^2 na podstawie $a, b, \cos(180-\alpha)$.



Etap IV Zaproponuj formułę na $\cos(180-\alpha)$, aby uzyskać jednolity wzór cosinusów.

Etap V Zaproponuj wartości dla $\cos 0$ i $\cos 180$.

A.4 Wyprowadzenie wzoru na środek odcinka

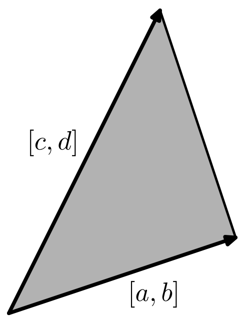


Wyprowadź wzór na środek odcinka o końcach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

(I) znajdź współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$,

(II) Wyznacz współrzędne środka korzystając z formuły $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

A.5 Pole trójkąta rozpiętego na wektorach $[a, b]$, $[c, d]$



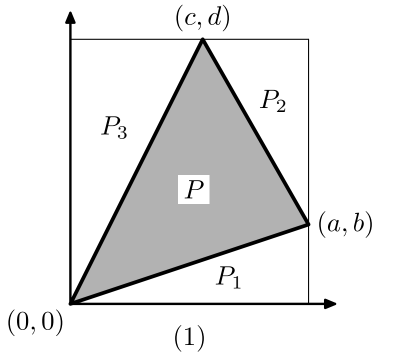
Chcesz wyprowadzić wzór

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc| \ .$$

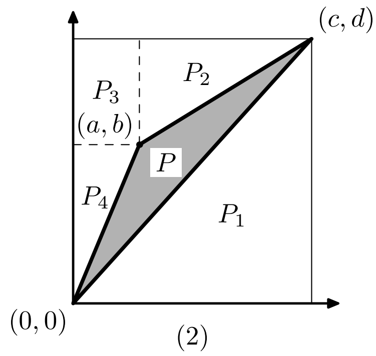
Etap I. Oblicz pole trójkąta rozpiętego na punktach $(0, 0)$, (a, b), (c, d). Traktując a, b, c, d jak znane oblicz pole prostokąta o bokach równoległych do osi układu, obejmującego badany trójkąt. Odejmij pola figur nadmiarowych. Rozważ przypadki:

(1) $0 < c < a$ i $0 < b < d$,

(2) $0 < a < c$ i $0 < b < d$ i punkt (a, b) leży ponad prostą łączącą $(0, 0)$ i (c, d).



(1)



(2)

Uwaga. Powyższe dwie sytuacje nie obejmują wszystkich możliwości. Pozostałe przypadki sprawdza się analogicznie.

Etap II. Wyprowadź wzór na pole trójkąta rozpiętego na wektorach $[a, b]$ i $[c, d]$. Przenieś początek układu do punktu, z którego wychodzą wektory i skorzystaj z poprzedniego etapu.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały pomocnicze z matematyki dla studentów I roku Politechniki Świętokrzyskiej
opracowane w ramach **projektu „Program Rozwojowy Potencjału Dydaktycznego Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach: kształcenie na miarę sukcesu" Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Poddziałanie 4.1.1**,
Zadanie 6 - Fakultatywne zajęcia wyrównawcze z matematyki i fizyki
dla studentów I roku 4 wydziałów PŚk
Umowa Nr: UDA-POKL.04.01.01-00-175/08-02

Opracował:

dr Andrzej Lenarcik